

# Differentialgleichungen II

Sommer 2018



Zusammenfassung



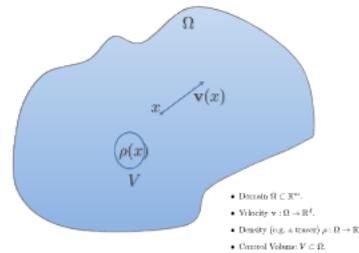
# Physikalische Prinzipien hinter PDGLn

## Erhaltungsprinzip

Idee: Leite PDGI aus physikalischem Gesetz (Erhaltung) her!

Masse  $M$  im Kontrollvolumen  $V$

$$M = \int_V \rho(x) dx$$



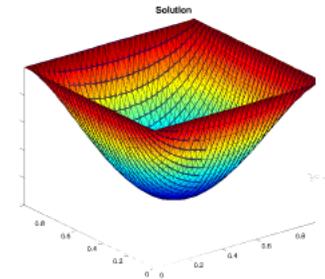
## Variationsprinzip

Idee: Leite PDGI aus physikalischem Gesetz (Minimierung) her!

Membran = Minimalfläche

Minimierungsproblem: Minimiere Beugungsenergie

$$J = \int_{\Omega} \sqrt{1 + \partial_{x_1} u^2 + \partial_{x_2} u^2} dx_1 dx_2 \stackrel{!}{=} \min$$
$$u|_{\partial\Omega} = \phi$$



# Grundlegende Definition

**Definition:** (Partielle Differentialgleichung)

Eine Gleichung bzw. ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{F} \left( \mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial^{p_1} x_1}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial^{p-1} x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial^p x_n} \right) = \mathbf{0}$$

für eine gesuchte Funktion  $\mathbf{u} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , heißt ein **System partieller Differentialgleichungen** (PDG oder PDE) für die  $m$  Funktionen  $u_1(\mathbf{x}), \dots, u_m(\mathbf{x})$ .

Tritt eine der partiellen Ableitungen  $p$ -ter Ordnung  $\left( \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial^{p_1} x_1 \dots \partial^{p_n} x_n} \right)$  explizit auf, so spricht man von einer **PDG der Ordnung  $p$** .

**Bemerkung:** In Anwendungen treten typischerweise (Systeme von) PDG **erster und zweiter Ordnung** auf.

# Kontinuitätsgleichung

## Kontinuitätsgleichung:

- Sei nun  $\rho(\mathbf{x}, t)$  die Massendichte einer physikalischen Größe (z.B. Fluiddichte).
- Es gelte ein **Erhaltungsprinzip** der Form

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = 0.$$

- Nach Reynold'schem Transportsatz gilt dann:

$$\int_{D_t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] (\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = 0.$$

- Da  $D_t \subset \mathbb{R}^n$  beliebige Teilmenge, gilt die PDG (**Kontinuitätsgleichung**):

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})(\mathbf{x}, t) = 0.$$

## Flussfunktion:

- Schreibe die Kontinuitätsgleichung mit Hilfe einer **Flussfunktion**  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = 0.$$

- Wir vermeiden *zwei* unbekannte Größen  $\rho$  und  $\mathbf{q}$  in *einer* Gleichung durch

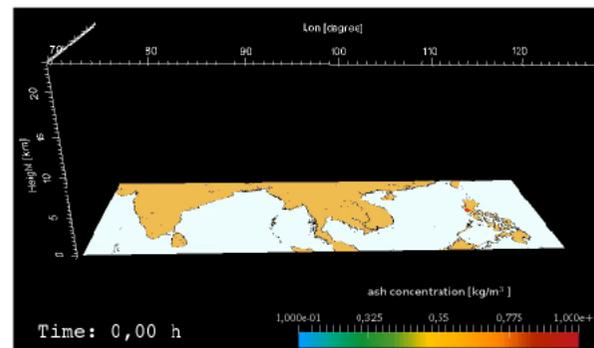
$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{q}(\rho(\mathbf{x}, t), \nabla \rho(\mathbf{x}, t), \dots).$$

- Beispiel: Der Fluss  $\mathbf{q}$  ist proportional zur Dichte  $\rho$ , also

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a} \cdot \rho(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n.$$

- Dann erhalten wir die (**Transportgleichung**):

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \mathbf{a} \cdot \nabla \rho(\mathbf{x}, t) = 0.$$



## Kontinuitätsgleichung:

- Sei nun  $\rho(\mathbf{x}, t)$  die Massendichte einer physikalischen Größe (z.B. Fluidichte).
- Es gelte ein **Erhaltungsprinzip** der Form

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0.$$

- Nach Reynold'schem Transportsatz gilt dann:

$$\int_{D_t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] (\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0.$$

- Da  $D_t \subset \mathbb{R}^n$  beliebige Teilmenge, gilt die PDG (**Kontinuitätsgleichung**):

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})(\mathbf{x}, t) = 0.$$

## Flussfunktion:

- Schreibe die Kontinuitätsgleichung mit Hilfe einer **Flussfunktion**  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = 0.$$

- Wir vermeiden zwei unbekannte Größen  $\rho$  und  $\mathbf{q}$  in *einer* Gleichung durch

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{q}(\rho(\mathbf{x}, t), \nabla \rho(\mathbf{x}, t), \dots).$$

- Beispiel: Der Fluss  $\mathbf{q}$  ist proportional zur Dichte  $\rho$ , also

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a} \cdot \rho(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n.$$

- Dann erhalten wir die (**Transportgleichung**):

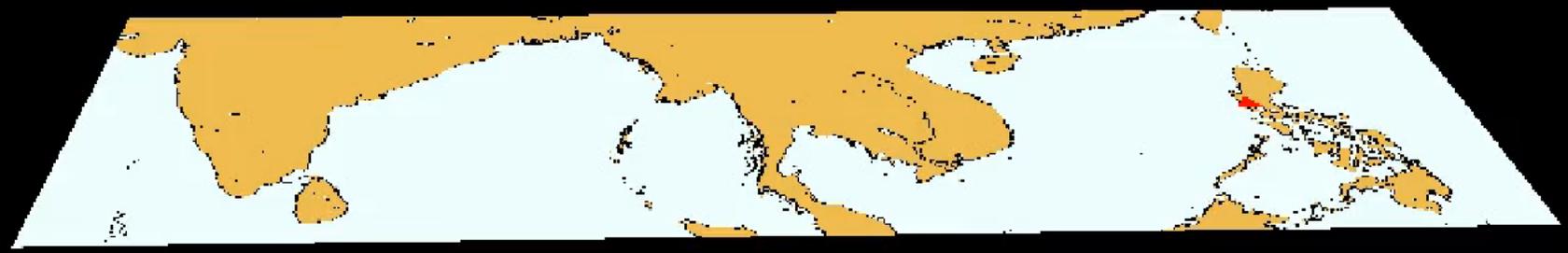
$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \mathbf{a} \cdot \nabla \rho(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Lon [degree]

70 80 90 100 110 120

Height [km]

20  
15  
10  
5  
0



ash concentration [kg/m<sup>3</sup>]

1,000e-01 0,325 0,55 0,775 1,000e+00

Time: 0,00 h



# 2. Charakteristiken- Methode

**Definition:** Das autonome System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\dot{x}(t) = a(x(t))$$

heißt das **charakteristische Differentialgleichungssystem** einer homogenen linearen PDE

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

**Definition:** Das auf ganz  $\mathbb{R}^n$  definierte Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + \sum_{i=1}^n a_i(x, t, u) u_{x_i} = b(x, t, u) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

bezeichnet man als ein **Cauchy-Problem**.

**Beispiel:** Wir betrachten die PDE in drei Variablen

$$\partial_t u_x + \partial_t u_y - (x^2 + y^2) u_x = 0$$

Das charakteristische System lautet dann

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \\ \dot{z} = x^2 + y^2 \end{cases}$$

und besitzt die allgemeine Lösung

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^t \\ y(t) = c_2 e^t \\ z(t) = \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2) e^{2t} + c_3 \end{cases}$$

**Definition:** Das autonome System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t))$$

heißt das **charakteristische Differentialgleichungssystem** einer homogenen linearen PDE

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}) u_{x_i} = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

**Beispiel:** Wir betrachten die PDE in drei Variablen

$$xu_x + yu_y + (x^2 + y^2)u_z = 0$$

Das charakteristische System lautet dann

$$\dot{x} = x$$

$$\dot{y} = y$$

$$\dot{z} = x^2 + y^2$$

und besitzt die allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 e^t$$

$$y(t) = c_2 e^t$$

$$z(t) = \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2)e^{2t} + c_3$$

**Definition:** Das auf ganz  $\mathbb{R}^n$  definierte Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, t, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, t, u) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

bezeichnet man als ein **Cauchy–Problem**.

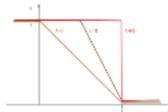
# 3. Erhaltungsgleichungen

**Beispiel:** (Burgers Gleichung)  
Die Burgers Gleichung ist gegeben durch die Flussfunktion  $f(u) = \frac{u^2}{2}$ , bzw. durch das Cauchy-Problem

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times ]0, \infty[ \\ u = u_0 \quad \text{auf } \mathbb{R} \times \{t=0\}$$

- Die Lösung ist gegeben durch  $u(t) = u_0 + f(u_0(x_t))$ .
- Falls  $u_0$  gegeben ist durch

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : x \leq 0 \\ 1-x & : 0 < x < 1 \\ 0 & : x \geq 1 \end{cases}$$



dann entwickelt  $x(t)$  für  $t \rightarrow 1$  eine Singularität.

- Eine klassische Lösung der Burgers Gleichung existiert nur lokal für  $0 \leq t < 1$ .
- Die lokale Lösung lautet für  $t \in [0, 1[$ :

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & : x < 1 \\ \frac{0-x}{0-t} & : 0 \leq t \leq x < 1 \\ 0 & : x > 1 \end{cases}$$

**Definition:** (schwache Lösung)

Eine Funktion  $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$  heißt **Integrallösung** oder **schwache Lösung** der Erhaltungsgleichung  $u_t + f(u)_x = 0$ , falls für alle Testfunktionen  $v$  gilt:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u v_t + f(u) v_x) dx dt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x) v(x, 0) dx = 0.$$

**Definition:** (Stoßwellenlösung)

Eine **Stoßwellenlösung**  $u$  ist eine schwache Lösung der Erhaltungsgleichung. Das Anfangswertproblem

$$u_t + f(u)_x = 0$$

wenn eine **Stoßfront**  $x = s(t)$ ,  $s \in C^1$  existiert, so dass  $v$  jeweils für  $x < s(t)$  und  $x > s(t)$  eine klassische Lösung der PDE ist und  $u$  bei  $x = s(t)$  ein Sprungstelle mit Sprunghöhe

$$[u](t) = u(s(t)^+, t) - u(s(t)^-, t) = v_1 - v_2$$

besitzt,  $s(t)$  heißt **Stoßgeschwindigkeit**.

**Satz:** ((Rankine-Hugoniot Bedingung))

Ist  $x = s(t)$  die Stoßfront einer Stoßwellenlösung von  $u_t + f(u)_x = 0$ , so gilt für die Stoßgeschwindigkeit  $s(t)$  die **Rankine-Hugoniot Bedingung**

$$s = \frac{[f]}{[u]} = \frac{f(u(s(t)^+, t)) - f(u(s(t)^-, t))}{u(s(t)^+, t) - u(s(t)^-, t)} = \frac{f(u_2) - f(u_1)}{u_2 - u_1}$$

**Beispiel:** (Burgers Gleichung)

Die **Burgers Gleichung** ist gegeben durch die Flussfunktion  $f(u) = \frac{u^2}{2}$ , bzw. durch das Cauchy-Problem

$$\begin{aligned}u_t + uu_x &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times ]0, \infty[ \\ u &= u_0 && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}\end{aligned}$$

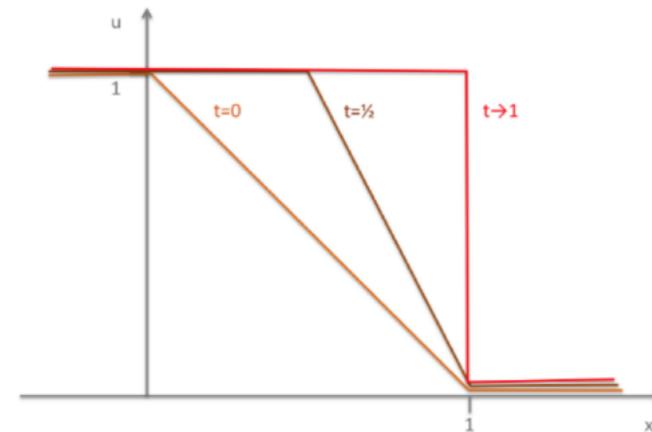
- Die Lösung ist gegeben durch  $u(t) = x_0 + tu_0(x_0)$ .
- Falls  $u_0$  gegeben ist durch

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : x \leq 0 \\ 1 - x & : 0 < x < 1 \\ 0 & : x \geq 1 \end{cases}$$

dann entwickelt  $x(t)$  für  $t \rightarrow 1$  eine Singularität.

- Eine klassische Lösung der Burgers Gleichung existiert nur **lokal** für  $0 \leq t < 1$ .
- Die lokale Lösung lautet für  $t \in [0, 1[$ :

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & : x < 1 \\ \frac{(1-x)}{(1-t)} & : 0 \leq t \leq x < 1 \\ 0 & : x > 1 \end{cases}$$



**Definition:** (schwache Lösung)

Eine Funktion  $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$  heißt **Integrallösung** oder **schwache Lösung** der Erhaltungsgleichung  $u_t + f(u)_x = 0$ , falls für alle Testfunktionen  $v$  gilt:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (uv_t + f(u)v_x) dxdt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)v(x, 0) dx = 0.$$

**Definition:** (Stoßwellenlösung)

Eine **Stoßwellenlösung**  $u$  ist eine schwache Lösung der Erhaltungsgleichung Das Anfangswertproblem

$$u_t + f(u)_x = 0$$

wenn eine **Stoßfront**  $x = s(t)$ ,  $s \in C^1$  existiert, so dass  $u$  jeweils für  $x < s(t)$  und  $x > s(t)$  eine klassische Lösung der PGD ist und  $u$  bei  $x = s(t)$  ein Sprungstelle mit Sprunghöhe

$$[u](t) = u(s(t)^+, t) - u(s(t)^-, t) = u_r - u_l$$

besitzt.  $\dot{s}(t)$  heißt **Stoßgeschwindigkeit**.

**Satz:** (Rankine-Hugoniot Bedingung)

Ist  $x = s(t)$  die Stoßfront einer Stoßwellenlösung von  $u_t + f(u)_x = 0$ , so gilt für die Stoßgeschwindigkeit  $\dot{s}(t)$  die **Rankine-Hugoniot Bedingung**

$$\dot{s} = \frac{[f]}{[u]} = \frac{f(u(s(t)^-, t)) - f(u(s(t)^+, t))}{u(s(t)^-, t) - u(s(t)^+, t)} = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}.$$

# 4. Entropie-Bedingung

**Satz:** (Verdünnungswelle)

Sei das Riemann Problem mit der Burgers Gleichung  $u_t + uu_x = 0$  in  $\mathbb{R} \times ]0, \infty[$  und  $u(x, t = 0) = x_0$  gegeben. Es sei

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : x \leq 0 \\ u_r & : x > 0 \end{cases} \quad \text{mit } u_l < u_r.$$

Dann ist die **Verdünnungswelle** gegeben durch

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & : x < f'(u_l)t \\ g\left(\frac{x}{t}\right) & : f'(u_l)t \leq x \leq f'(u_r)t \\ u_r & : x > f'(u_r)t \end{cases}$$

eine Integrallösung des Riemann Problems.

**Definition:** (Entropiebedingung)

Eine Integrallösung heißt **Entropielösung**, falls die Lösung die folgende **Entropiebedingung** oder **Lax-Oleinik-Bedingung** erfüllt:

Es gibt ein  $C > 0$ , so dass für alle  $x, z \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$  mit  $z > 0$  gilt:

$$u(t, x + z) - u(t, x) < \frac{C}{t}z.$$

# DEUTIGUNG

**Satz:** (Verdünnungswelle)

Sei das Riemann Problem mit der Burgers Gleichung  $u_t + uu_x = 0$  in  $\mathbb{R} \times ]0, \infty[$  und  $u(x, t = 0) = x_0$  gegeben. Es sei

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : x \leq 0 \\ u_r & : x > 0 \end{cases} \quad \text{mit } u_l < u_r.$$

Dann ist die **Verdünnungswelle** gegeben durch

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & : x < f'(u_l)t \\ g\left(\frac{x}{t}\right) & : f'(u_l)t \leq x \leq f'(u_r)t \\ u_r & : x > f'(u_r)t \end{cases}$$

eine Integrallösung des Riemann Problems.

**Definition:** (Entropiebedingung)

Eine Integrallösung heißt **Entropielösung**, falls die Lösung die folgende **Entropiebedingung** oder **Lax-Oleinik-Bedingung** erfüllt:

Es gibt ein  $C > 0$ , so dass für alle  $x, z \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$  mit  $z > 0$  gilt:

$$u(t, x + z) - u(t, x) < \frac{C}{t}z.$$

# 5. PDGLn zweiter Ordnung

**Definition:** (PDG 2. Ordnung)

Eine **lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung** in  $n$  Variablen ist gegeben durch

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + f u = g.$$

Dabei sind die Terme  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $f$  und  $g$  Funktionen von  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ .

**Definition:** (Korrekt gestelltes Problem)

Ein **korrekt gestelltes Problem** (auch **wohlgestelltes Problem**) besteht aus

- einer in einem Gebiet definierten **partiellen Differentialgleichung**, und
- einem Satz von **Anfangs- und/oder Randbedingungen**,

so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. **Existenz:** Es existiert wenigstens eine Lösung, die alle Bedingungen erfüllt;
2. **Eindeutigkeit:** Die Lösung ist eindeutig;
3. **Stabilität:** Die Lösung hängt stetig von den Anfangs-/Randbedingungen ab

**Definition:** (Klassifikation partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung)

Gegeben sei die PDG 2. Ordnung ( $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  konstant und symmetrisch)

$$(\nabla^T A \nabla) u + (\mathbf{b}^T \nabla) u + f u = g.$$

Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  die Eigenwerte der Matrix  $A$ .

1. Falls  $\lambda_i \neq 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$  und haben alle  $\lambda_i$  gleiches Vorzeichen, so heißt die Gleichung **elliptisch**.
2. Falls  $\lambda_i \neq 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$  und hat ein Eigenwert ein anderes Vorzeichen als die übrigen  $n - 1$  Eigenwerte, so heißt die Gleichung **hyperbolisch**.
3. Gilt  $\lambda_k = 0$  für mindestens ein  $k \in \{1, \dots, n\}$ , so heißt die Gleichung **parabolisch**.

1. Die **elliptische Laplace-Gleichung**

$$\Delta u = 0.$$

2. Die **hyperbolische Wellen-Gleichung**

$$u_{tt} - \Delta u = 0.$$

3. Die **parabolische Wärmeleitungs-Gleichung**

$$u_t = \Delta u.$$

**Definition:** (PDG 2. Ordnung)

Eine **lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung** in  $n$  Variablen ist gegeben durch

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + f u = g.$$

Dabei sind die Terme  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $f$  und  $g$  Funktionen von  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ .

**Definition:** (Klassifikation partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung)

Gegeben sei die PDG 2. Ordnung ( $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  konstant und symmetrisch)

$$(\nabla^\top A \nabla)u + (\mathbf{b}^\top \nabla)u + fu = g.$$

Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  die Eigenwerte der Matrix  $A$ .

1. Falls  $\lambda_i \neq 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$  und haben alle  $\lambda_i$  gleiches Vorzeichen, so heißt die Gleichung **elliptisch**.
2. Falls  $\lambda_i \neq 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$  und hat ein Eigenwert ein anderes Vorzeichen als die übrigen  $n - 1$  Eigenwerte, so heißt die Gleichung **hyperbolisch**.
3. Gilt  $\lambda_k = 0$  für mindestens ein  $k \in \{1, \dots, n\}$ , so heißt die Gleichung **parabolisch**.

1. Die elliptische **Laplace-Gleichung**

$$\Delta u = 0.$$

2. Die hyperbolische **Wellen-Gleichung**

$$u_{tt} - \Delta u = 0.$$

3. Die parabolische **Wärmeleitungs-Gleichung**

$$u_t = \Delta u.$$

**Definition:** (Korrekt gestelltes Problem)

Ein **korrekt gestelltes Problem** (auch **wohlgestelltes Problem**) besteht aus

- einer in einem Gebiet definierten *partiellen Differentialgleichung*, und
- einem Satz von *Anfangs- und/oder Randbedingungen*,

so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. **Existenz:** Es existiert wenigstens eine Lösung, die alle Bedingungen erfüllt;
2. **Eindeutigkeit:** Die Lösung ist eindeutig;
3. **Stabilität:** Die Lösung hängt stetig von den Anfangs-/Randbedingungen ab

# 6. Laplace-Gleichung

**Definition:** (Laplace- und Poisson-Gleichung)

Sei  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$  eine zweimal stetig diff'bare Funktion,  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $u = u(x)$ . Dann ist die **Laplace-Gleichung** gegeben durch

$$\Delta u = 0.$$

Die **Poisson-Gleichung** ist gegeben durch

$$-\Delta u = f$$

mit vorgegebener rechter Seite  $f = f(x)$ .

**Definition:** (Greensche Funktion)

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\Phi^*(y)$  die Lösung des Dirichlet-Problems

$$\begin{aligned} \Delta \Phi^* &= 0 && \text{in } U \\ \Phi^* &= \Phi(y-x) && \text{auf } \partial U. \end{aligned}$$

Dann ist die **Greensche Funktion**  $G$  auf  $U$  gegeben durch

$$G(x,y) := -\Phi(y-x) + \Phi^*(y) \quad x,y \in U, x \neq y.$$

**Satz:** (Lösung des Dirichlet-Problems der Poisson-Gleichung)

Sei  $u \in C^2(\bar{U})$  eine Lösung des Dirichlet-Problems der Poisson-Gleichung. Dann lässt sich  $u$  in der Form

$$u(x) = \int_{\partial U} g(y) \frac{\partial G}{\partial n}(x,y) dS(y) + \int_U f(y) G(x,y) dy \quad (x \in U)$$

darstellen.  $f$  und  $g$  sind die rechte Seite, bzw. Randbedingung des Dirichlet-Problems.

**Definition:** (Fundamentallösung der Laplace-Gleichung)

Die Funktion  $\Phi(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$ , definiert durch

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log \|x\| & (n=2) \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \|x\|^{2-n} & (n \geq 3) \end{cases}$$

heißt **Fundamentallösung der Laplace-Gleichung**.

**Satz:** (Darstellung der Lösung der Poisson-Gleichung)

Eine Lösung der Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

ist gegeben durch

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy.$$

**Satz:** (Mittelwert-Eigenschaft harmonischer Funktionen)

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge. Ist  $u \in C^2(U)$  harmonisch, dann gilt für jede Kugel  $B(x,r) \subset U$

$$u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u dS = \int_{B(x,r)} \Delta u dy.$$

**Satz:** (Eindeutige Lösbarkeit der Randwertaufgabe)

Sei  $g \in C(\partial U)$  und  $f \in C(U)$ . Dann existiert höchstens eine Lösung  $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$  des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } U \\ u &= g && \text{auf } \partial U. \end{aligned}$$

**Definition:** (Laplace- und Poisson-Gleichung)

Sei  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$  eine zweimal stetig diff'bare Funktion,  $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $u = u(\mathbf{x})$ . Dann ist die **Laplace-Gleichung** gegeben durch

$$\Delta u = 0.$$

Die **Poisson-Gleichung** ist gegeben durch

$$-\Delta u = f$$

mit vorgegebener rechter Seite  $f = f(\mathbf{x})$ .

**Definition:** (Fundamentallösung der Laplace-Gleichung)

Die Funktion  $\Phi(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \neq 0$ , definiert durch

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log \|x\| & (n = 2) \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \|x\|^{2-n} & (n \geq 3) \end{cases}$$

heißt **Fundamentallösung der Laplace-Gleichung**.

**Satz:** (Darstellung der Lösung der Poisson-Gleichung)

Eine Lösung der Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

ist gegeben durch

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

**Satz:** (Mittelwert-Eigenschaft harmonischer Funktionen)

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge. Ist  $u \in C^2(U)$  harmonisch, dann gilt für jede Kugel  $B(\mathbf{x}, r) \subset U$

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u \, dS = \int_{B(\mathbf{x}, r)} u \, d\mathbf{y}.$$

**Satz:** (Eindeutige Lösbarkeit der Randwertaufgabe)

Sei  $g \in C(\partial U)$  und  $f \in C(U)$ . Dann existiert höchstens eine Lösung  $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$  des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } U \\ u &= g && \text{auf } \partial U. \end{aligned}$$

**Definition:** (Greensche Funktion)

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\Phi^x(\mathbf{y})$  die Lösung des Dirichlet-Problems

$$\begin{aligned}\Delta \Phi^x &= \quad \text{in } U \\ \Phi^x &= \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad \text{auf } \partial U.\end{aligned}$$

Dann ist die **Greensche Funktion**  $G$  auf  $U$  gegeben durch

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi^x(\mathbf{y}) \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$$

**Satz:** (Lösung des Dirichlet-Problems der Poisson-Gleichung)

Sei  $u \in C^2(\overline{U})$  eine Lösung des Dirichlet-Problems der Poisson-Gleichung. Dann lässt sich  $u$  in der Form

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial U} g(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) + \int_U f(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (\mathbf{x} \in U)$$

darstellen.  $f$  und  $g$  sind die rechte Seite, bzw. Randbedingung des Dirichlet-Problems.

# 7. Greensche Funktion

**Definition:** (Poissonkern)

Die Funktion

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n},$$

mit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}_+^n$  heißt **Poissonkern** von  $\mathbb{R}_+^n$ .

**Satz:** (Dirichlet-Problem für die Laplace Gleichung)

Sei das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+^n \\ u = g & \text{auf } \partial\mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top : x_n = 0\} \end{cases}$$

gegeben. Dann ist die Lösung gegeben durch die **Poissonsche Integralformel**

$$u(\mathbf{x}) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} d\mathbf{y}.$$

**Definition:** (Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung) Die Funktion

$$\Phi(\mathbf{x}, t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4t}} & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0) \\ 0 & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t < 0) \end{cases}$$

heißt **Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung**.

**Bemerkungen:** (Lösung für das Cauchy-Problem)

Mit Hilfe von  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  lässt sich für das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times ]0, \infty[ \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$$

eine Lösungsdarstellung in der Form eines Faltungsintegrals angeben:

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

# FUNKTION

**Definition:** (Poissonkern)

Die Funktion

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n},$$

mit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}_+^n$  heißt **Poissonkern** von  $\mathbb{R}_+^n$ .

**Satz:** (Dirichlet-Problem für die Laplace Gleichung)

Sei das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+^n \\ u = g & \text{auf } \partial\mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top : x_n = 0\} \end{cases}$$

gegeben. Dann ist die Lösung gegeben durch die **Poissonsche Integralformel**

$$u(\mathbf{x}) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} d\mathbf{y}.$$

**Definition:** (Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung) Die Funktion

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} dy.$$

**Definition:** (Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung) Die Funktion

$$\Phi(\mathbf{x}, t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4t}} & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0) \\ 0 & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t < 0) \end{cases}$$

heißt **Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung**.

**Bemerkungen:** (Lösung für das Cauchy-Problem)

Mit Hilfe von  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  lässt sich für das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times ]0, \infty[ \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$$

eine Lösungsdarstellung in der Form eines Faltungsintegrals angeben:

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) g(\mathbf{y}) dy$$

# 8. Wärmeleitungs- und Wellengleichung

Das inhomogene Anfangswertproblem mit inhomogenen Anfangsbedingungen

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times ]0, \infty[ \\ u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

besitzt die Lösung

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds.$$

**Satz:** (Formel von d'Alembert)

Eine Lösung des eindimensionalen Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{tt} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times ]0, \infty[, \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

mit  $g, h$  gegebene Anfangsbedingungen, ist gegeben durch die **Formel von d'Alembert**:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy.$$

**Satz:** (Mittelwertesatz der Wärmeleitungsgleichung)

Ist  $u \in C^2(U_t)$  eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, so gilt

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4^n} \int_{E(\mathbf{x}, t, r)} \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{(t-s)^2} u(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds$$

für jede Menge  $E(\mathbf{x}, t, r) \subset U_t$ .

**Satz:** (Eindeutigkeit von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung)

Das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } U_T \\ u = g & \text{auf } \Gamma_T \end{cases}$$

auf dem beschränkten Gebiet  $U_T$  mit stetigen Funktionen  $f$  und  $g$  besitzt **maximal eine Lösung**  $u \in C^2(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ .

# Wellen

Das inhomogene Anfangswertproblem mit inhomogenen Anfangsbedingungen

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times ]0, \infty[ \\ u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

besitzt die Lösung

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) \, d\mathbf{y} ds.$$

**Satz:** (Mittelwerteigenschaft der Wärmeleitungsgleichung)

Ist  $u \in C_1^2(U_t)$  eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, so gilt

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4r^n} \int_{E(\mathbf{x}, t; r)} \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{(t - s)^2} u(\mathbf{y}, s) \, d\mathbf{y} ds$$

für jede Menge  $E(\mathbf{x}, t; r) \subset U_t$ .

**Satz:** (Eindeutigkeit von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung)

Das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } U_t \\ u = g & \text{auf } \Gamma_T \end{cases}$$

auf dem beschränkten Gebiet  $U_T$  mit stetigen Funktionen  $f$  und  $g$  besitzt **maximal eine Lösung**  $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ .

**Satz:** (Formel von d'Alembert)

Eine Lösung des eindimensionalen Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty[, \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

mit  $g, h$  gegebene Anfangsbedingungen, ist gegeben durch die **Formel von d'Alembert**:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[g(x + t) + g(x - t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy.$$

# 9. Wellengleichung

**Zusammenfassung:** (Reflektion des Halbraumes  $\mathbb{R}_+$ )  
Eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times ]0, \infty[ \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t=0\} \\ u = 0 & \text{auf } \{x=0\} \times ]0, \infty[ \end{cases}$$

ist gegeben durch

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[g(x-t) + g(x+t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy & \text{für } x \geq t \geq 0 \\ \frac{1}{2}[g(x-t) - g(-x+t)] + \frac{1}{2} \int_{-x+t}^{x+t} h(y) dy & \text{für } 0 \leq x \leq t \end{cases}$$

**Bemerkung:** (Poissonsche Formel für  $n=2$ )  
Die Lösung des Anfangswertproblems der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \times ]0, \infty[ \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^2 \times \{t=0\} \end{cases}$$

lautet für  $x \in \mathbb{R}^2, t > 0$  (Poissonsche Formel):

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{\partial B(x,t)} \frac{tg(y) + t^2 h(y) + t Dg(y) \cdot (y-x)}{(t^2 - |y-x|^2)^{\frac{1}{2}}} dy$$

**Bemerkung:** (Mittelwert über der Kugel) Für  $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$  und  $r > 0$  definiere den Mittelwert von  $u(x, t)$  über der Kugel  $\partial B(x, r)$  (oder auch  $\partial B(x, r)$ )

$$U(x; r, t) := \int_{\partial B(x,r)} u(y, t) dS(y).$$

Weiter sei

$$G(x; r) := \int_{\partial B(x,r)} g(y) dS(y)$$

$$H(x; r) := \int_{\partial B(x,r)} h(y) dS(y)$$

**Bemerkung:** (Kirchhoffsche Formel für  $n=3$ )  
Die Lösung des Anfangswertproblems der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times ]0, \infty[ \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^3 \times \{t=0\} \end{cases}$$

lautet für  $x \in \mathbb{R}^3, t > 0$  (Kirchhoffsche Formel):

$$u(x, t) = \int_{\partial B(x,t)} (th(y) + g(y) + Dg(y) \cdot (y-x)) dS(y)$$

**Satz:** (Euler-Poisson-Darboux Gleichung)  
Sei  $x \in \mathbb{R}^n$  fest und  $u$  eine Lösung der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times ]0, \infty[ \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

Dann löst  $U(x; r, t)$  die Euler-Poisson-Darboux Gleichung

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r} U_r = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times ]0, \infty[ \\ U = G, U_t = H & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t=0\} \end{cases}$$

**Zusammenfassung:** (Reflektion des Halbraumes  $\mathbb{R}_+$ )  
Eine Lösung des *Anfangsrandwertproblems*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times ]0, \infty[ \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{auf } \{x = 0\} \times ]0, \infty[ \end{cases}$$

ist gegeben durch

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy & \text{für } x \geq t \geq 0 \\ \frac{1}{2}[g(x+t) - g(-x+t)] + \frac{1}{2} \int_{-x+t}^{x+t} h(y) dy & \text{für } 0 \leq x \leq t \end{cases}$$

**Bemerkung:** (Mittelwert über der Kugel) Für  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$  und  $r > 0$  definiere den **Mittelwert** von  $u(x, t)$  **über der Kugel**  $\partial B_r(x)$  (oder auch  $\partial B(x, r)$ )

$$U(x; r, t) := \int_{\partial B_r(x)} u(y, t) dS(y).$$

Weiter sei

$$G(x; r) := \int_{\partial B_r(x)} g(y) dS(y)$$

$$H(x, r) := \int_{\partial B_r(x)} h(y) dS(y)$$

**Satz:** (Euler-Poisson-Darboux Gleichung)

Sei  $x \in \mathbb{R}^n$  fest und  $u$  eine Lösung der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times ]0, \infty[ \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Dann löst  $U(x; r, t)$  die **Euler-Poisson-Darboux Gleichung**

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r}U_r = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times ]0, \infty[ \\ U = G, U_t = H & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \end{cases}$$

**Bemerkung:** (Kirchhoffsche Formel für  $n = 3$ )

Die Lösung des Anfangsproblems der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times ]0, \infty[ \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\} \end{cases}$$

lautet für  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $t > 0$  (**Kirchhoffsche Formel**):

$$u(x, t) = \int_{\partial B_t(x)} (th(y) + g(y) + Dg(y) \cdot (y - x)) dS(y)$$

**Bemerkung:** (Poissonsche Formel für  $n = 2$ )

Die Lösung des Anfangsproblems der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \times ]0, \infty[ \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^2 \times \{t = 0\} \end{cases}$$

lautet für  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $t > 0$  (**Poissonsche Formel**):

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{\partial B_t(x)} \frac{tg(y) + t^2 h(y) + t Dg(y) \cdot (y - x)}{(t^2 - |y - x|^2)^{\frac{1}{2}}} dy$$

# 10. Fourier-Methode

**Bemerkung:** (Allgemeine Approximative Lösung der 1D Poisson Gleichung)

- Sei das eindimensionale Randwertproblem gegeben:
- $$\begin{cases} -T \frac{d^2 u}{dx^2} = f(x), & 0 < x < l, \\ u(0) = u(l) = 0. \end{cases}$$

- Approximiere die rechte Seite  $f(x)$  durch eine **endliche Fourier-Reihe**  $f_N(x)$

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^N c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

- Die Fourier-Koeffizienten ergeben sich zu ( $n = 1, \dots, N$ )

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$$

- Dann ist eine **approximative Lösung** des Randwertproblems gegeben durch:

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{\beta c_n}{T n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & : 0 < x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u_x(x, 0) = h(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

ist gegeben durch

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \frac{b_n t}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right\} \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)$$

Dabei sind  $a_n$  die Fourier-Koeffizienten der Entwicklung der vorgegeben Anfangsbedingung  $u(x, 0) = g(x)$  und  $b_n$  die entsprechenden Koeffizienten von  $u_x(x, 0) = h(x)$ .

**Erweiterung:** (Variation komplexer) Ersetze das Anfangswertproblem durch

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t) & : 0 < x < l, 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & : 0 < t \leq T. \end{cases}$$

Ersetze die rechte Seite durch die Entwicklung in Form einer Fourier-Reihe

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

**Periodische Randbedingungen**

Anfangswertproblem auf dem Intervall  $[-l, l]$  gegeben durch

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t) & : -l < x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : -l \leq x \leq l \\ u(-l, t) = u(l, t) & : 0 \leq t \leq T \\ u_x(-l, t) = u_x(l, t) & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Periodische Funktionen auf dem Intervall  $[-l, l]$  sind

$$\psi(x) = \frac{1}{2}, \quad \varphi(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad \psi(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Ein **Lösungsansatz** mit Hilfe von Fourier-Reihen ist damit

$$u(x, t) = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right)$$

**Bemerkung:** (Allgemeine Approximative Lösung der 1D Poisson Gleichung)

- Sei das eindimensionale Randwertproblem gegeben:

$$\begin{cases} -T \frac{d^2 u}{dx^2} = f(x), & 0 < x < l, \\ u(0) = u(l) = 0. \end{cases}$$

- Approximiere die rechte Seite  $f(x)$  durch eine **endliche Fourier-Reihe**  $f_N(x)$

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^N c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

- Die Fourier-Koeffizienten ergeben sich zu ( $n = 1, \dots, N$ )

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$$

- Dann ist eine **approximative Lösung** des Randwertproblems gegeben durch:

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{l^2 c_n}{T n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

**Erinnerung:** (Wärmeleitungsgleichung) Betrachte das Anfangsrandwertproblem der Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t) & : 0 < x < l, 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Gesucht ist eine Lösung in Form einer Fourier-Reihe:

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

## Periodische Randbedingungen

Anfangsrandwertproblem auf dem **Intervall**  $[-l, l]$  gegeben durch

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t) & : -l < x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : -l \leq x \leq l \\ u(-l, t) = u(l, t) & : 0 \leq t \leq T \\ u_x(-l, t) = u_x(l, t) & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Periodische Funktionen auf dem Intervall  $[-l, l]$  sind

$$\psi(x) = \frac{1}{2}, \quad \psi(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad \psi(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Ein **Lösungsansatz** mit Hilfe von Fourier-Reihen ist damit

$$u(x, t) = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right)$$

## Die Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - u_{xx} = 0 & : 0 < x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u_t(x, 0) = h(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{array} \right.$$

ist gegeben durch

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ b_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}t\right) + \frac{d_n l}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{l}t\right) \right\} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

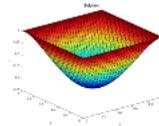
Dabei sind  $b_n$  die Fourier-Koeffizienten der Entwicklung der vorgegebenen Anfangsbedingung  $u(x, 0) = g(x)$  und  $d_n$  die entsprechenden Koeffizienten von  $u_t(x, 0) = h(x)$ .

# 11. Numerische Methoden für Elliptische Gleichung

Modellproblem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega = [0, 1]^2 \in \mathbb{R}^2$$

$$u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$



**Finite Differenzen**

Diskretisiere den Differentialoperator

$$-\Delta = L_h \approx L_h$$

mit  $\frac{\Delta u}{\Delta x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2}$

$$\sum_{i,j} u_{i,j}^2 \approx \sum_{i,j} u_{i,j}^2$$

$$\sum_{i,j} u_{i,j}^2 \approx \sum_{i,j} u_{i,j}^2$$

$$\sum_{i,j} u_{i,j}^2 \approx \sum_{i,j} u_{i,j}^2$$

**Finite Volumen**

Diskretisiere die Flussform



$$\sum_{i,j} u_{i,j}^2 \approx \sum_{i,j} u_{i,j}^2$$

$$\sum_{i,j} u_{i,j}^2 \approx \sum_{i,j} u_{i,j}^2$$

$$\sum_{i,j} u_{i,j}^2 \approx \sum_{i,j} u_{i,j}^2$$

**Finite Elemente**

'Diskretisiere Funktionenraum'

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

$$\int_{\Omega} -\Delta u \phi_h = \int_{\Omega} f \phi_h \quad \forall \phi_h \in V_h$$

$$-\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi_h = \int_{\Omega} f \phi_h \quad \forall \phi_h \in V_h$$

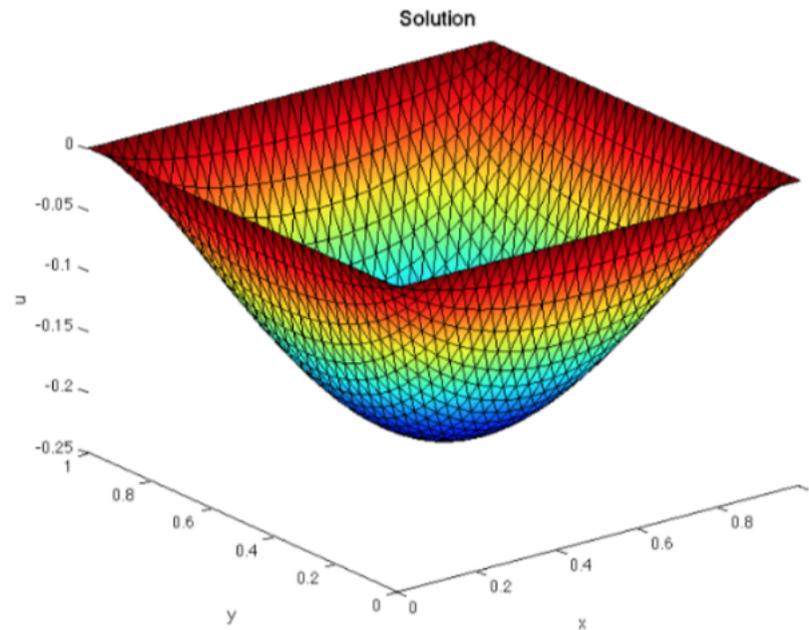
fixiere die Werte  $u_{i,j} = u(x_i, y_j) = u_{i,j}$

Lineares Gleichungssystem

$$L_h u_h = f_h$$

# *Modellproblem*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega = [0, 1]^2 \in \mathbb{R}^2 \\ u &= 0 & \text{on } \partial\Omega \end{aligned}$$



*Finite Volumen*

# *Finite Differenzen*

Diskretisiere den Differenzialoperator

$$-\Delta = L \approx L_h$$

hier:  $\frac{du}{dx} = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x), \quad \Delta x = x_{i+1} - x_i.$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$



$$-\Delta u = \frac{4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

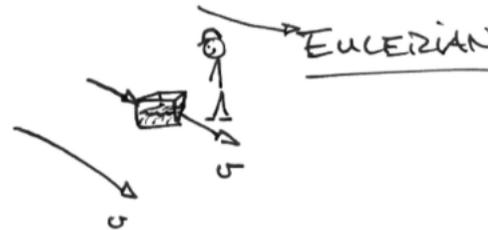
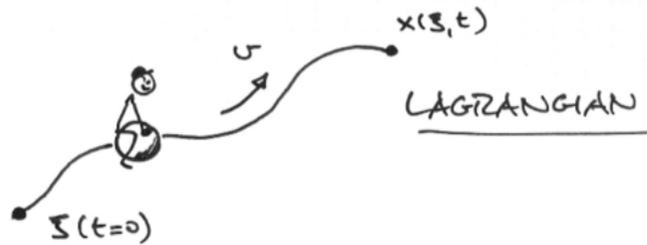
y

0 0

x

# *Finite Volumen*

Diskretisiere die Flussform



$$\int_{E_i} f \, dx = - \int_{\partial E_i} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds$$

$$\approx - \int_{\partial E_{i,1}} \partial_{h,n} u_h \, ds - \int_{\partial E_{i,2}} \partial_{h,n} u_h \, ds - \int_{\partial E_{i,3}} \partial_{h,n} u_h \, ds - \int_{\partial E_{i,4}} \partial_{h,n} u_h \, ds$$

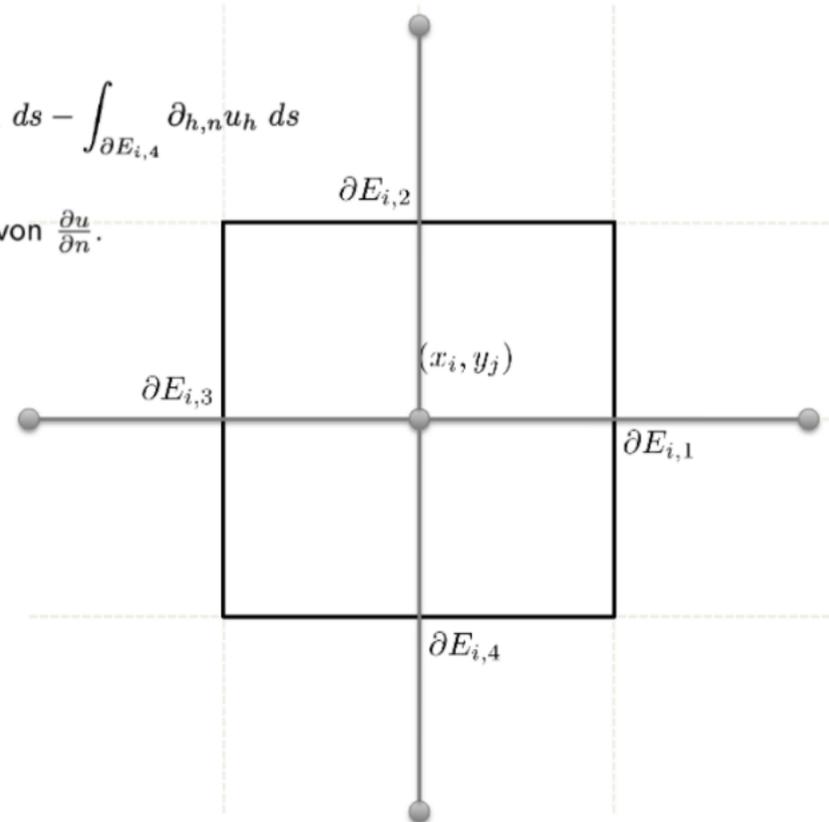
$\partial_{h,n} u_h$ : Finite Differenzen Approximation von  $\frac{\partial u}{\partial n}$ .

$$\int_{\partial E_{i,1}} \partial_{h,n} u_h \, ds = \Delta x \cdot \left[ \frac{u_h(x_{i+1}, y_j) - u_h(x_i, y_j)}{\Delta x} \right]$$

$$\int_{\partial E_{i,2}} \partial_{h,n} u_h \, ds = \Delta x \cdot \left[ \frac{u_h(x_i, y_{j+1}) - u_h(x_i, y_j)}{\Delta x} \right]$$

$$\int_{\partial E_{i,3}} \partial_{h,n} u_h \, ds = \Delta x \cdot \left[ \frac{u_h(x_{i-1}, y_j) - u_h(x_i, y_j)}{\Delta x} \right]$$

$$\int_{\partial E_{i,4}} \partial_{h,n} u_h \, ds = \Delta x \cdot \left[ \frac{u_h(x_i, y_{j-1}) - u_h(x_i, y_j)}{\Delta x} \right]$$



# *Finite Elemente*

"Diskretisiere Funktionen Raum"

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega,$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} -\Delta u \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \quad \forall \varphi$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \quad \forall \varphi$$

Nun wird das Variations-Problem  $a(u_h, v_h) = f(v_h)$  ersetzt durch

$$u_i \cdot a(\varphi_i, \varphi_j) = f(\varphi_j), \quad \forall i, j = 1, \dots, N,$$

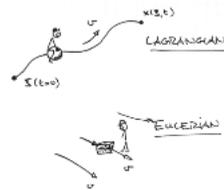
da  $u_h = \sum u_i \varphi_i$ .

# *Lineares Gleichungssystem*

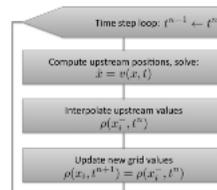
$$L_h u_h = f_h$$

# 12. Numerische Methoden für Transportgleichung

## Lagrangesche Perspektive



## Algorithmus

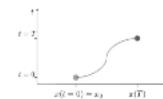


- Position:  $x = x(t)$ .
- Velocity:  $v = v(x, t)$ .

Particle position can be computed by

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v(x, t)$$

With initial condition  $x(t=0) = x_0$



**Problem:** Passive advection ( $s \equiv 0$ ):



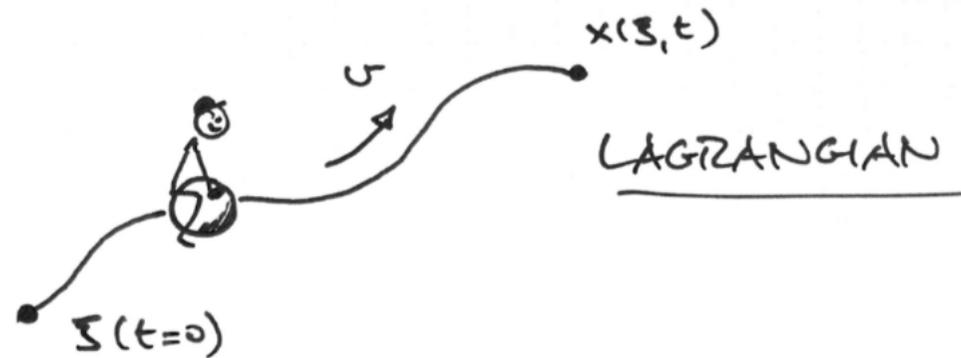
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v(x, t), & x(0) &= x_0, \\ \frac{d\rho}{dt} &= 0, & \rho(x, 0) &= \rho_0(x). \end{aligned}$$

**Strategy:**

- Solve  $\frac{dx}{dt} = v$  by any ODE solver,
- Solve  $\frac{d\rho}{dt} = 0$  by finite difference.

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &\approx \frac{\rho(x_i, t^{n+1}) - \rho(x_i^-, t^n)}{\Delta t} = 0 \\ &\Rightarrow \rho^+ = \rho^-. \end{aligned}$$

# Lagrangesche Perspektive

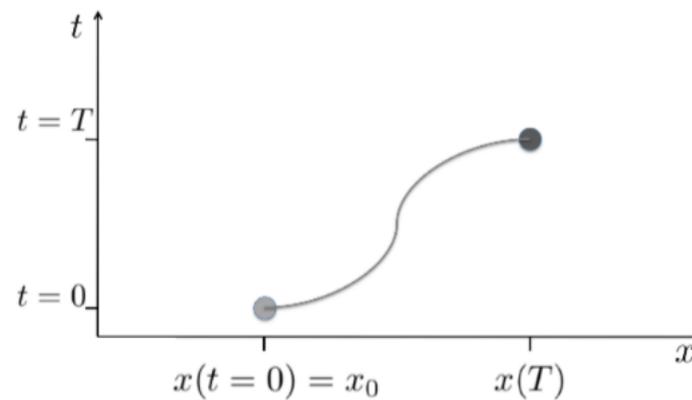


- Position:  $x = x(t)$ .
- Velocity:  $v = v(x, t)$ .

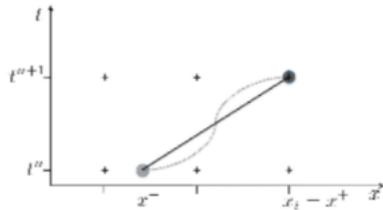
Particle position can be computed by

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v(x, t)$$

With initial condition  $x(t = 0) = x_0$



**Problem:** Passive advection ( $s \equiv 0$ ):



$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v(x, t), & x(0) &= x_0, \\ \frac{d\rho}{dt} &= 0, & \rho(x, 0) &= \rho_0(x).\end{aligned}$$

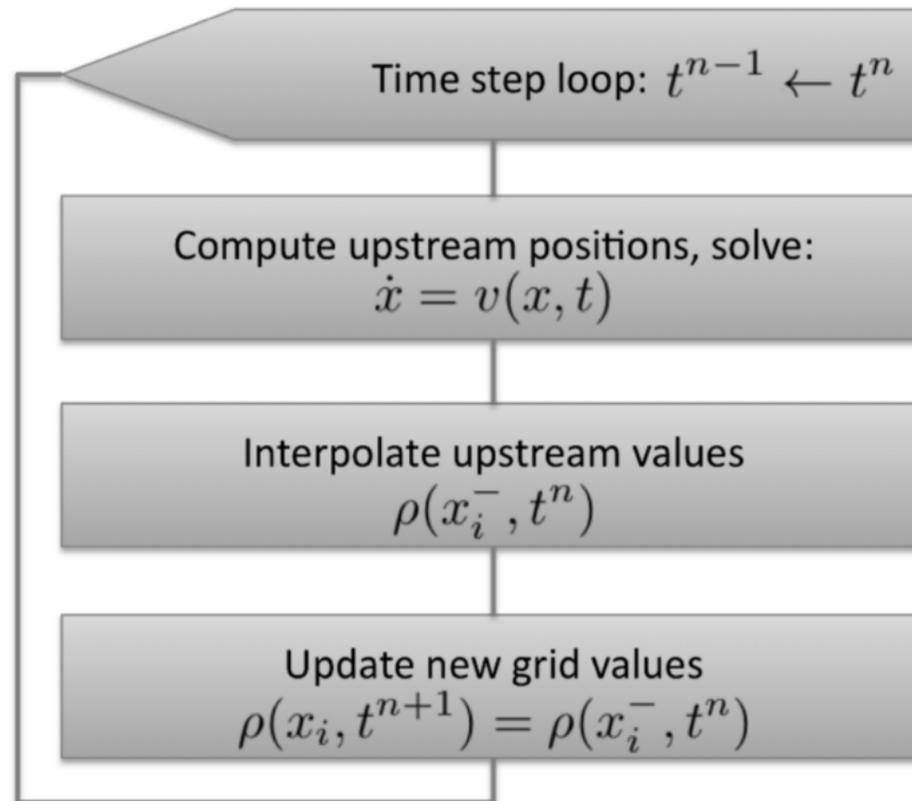
**Strategy:**

- Solve  $\frac{dx}{dt} = v$  by any ODE solver,
- Solve  $\frac{d\rho}{dt} = 0$  by finite difference.

$$\frac{d\rho}{dt} \approx \frac{\rho(x_i, t^{n+1}) - \rho(x_i^-, t^n)}{\Delta t} = 0$$

$$\Rightarrow \rho^+ = \rho^-.$$

# Algorithmus



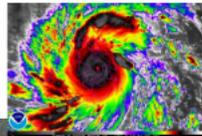
**Problem:**

# Gesellschaft und Partielle DGLn

## *Naturkatastrophen sind die Schnittstelle zur Gesellschaft*

Globaler Wandel  
Einfluss auf Gesellschaft

Prävention  
Vermeidung  
Planung



## *Deterministischer Ansatz*

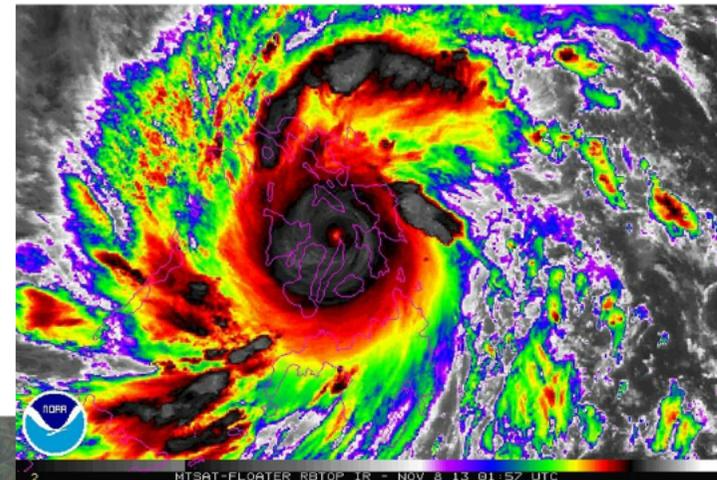
- Verständnis des physikalischen Mechanismus
- Physikalisches Model für probabilistische Methoden
- Löse Differentialgleichungen!

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\rho) + \nabla(\nu \nabla \rho) = S(\rho)$$

# *Naturkatastrophen sind die Schnittstelle zur Gesellschaft*

Gobaler Wandel  
Einfluss auf Gesellschaft

Prävention  
Vermeidung  
Planung



Sources: AFP/Spiegel Online, NOAA

# *Deterministischer Ansatz*

- Verständnis des physikalischen Mechanismus
- Physikalisches Model für probabilistische Methoden
- Löse Differentialgleichungen!

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\rho) + \nabla(\nu \nabla \rho) = S(\rho)$$

# Beispiele

## Tsunami



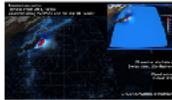
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \nabla \cdot \nabla \eta + \eta \nabla^2 \eta = 0,$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (\eta \nabla \eta) = 0.$$

$$\eta = \eta_0 + \eta_1 + \eta_2 + \dots$$

Nonlinear

Linearized

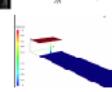
Nonlinear



## Sturmfluten



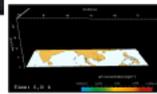
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \nabla \cdot \nabla \eta + \eta \nabla^2 \eta = 0,$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (\eta \nabla \eta) = 0.$$



## Vulkanische Ausbreitung



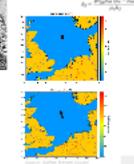
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \nabla \cdot (\eta \nabla \eta) - \nabla \cdot (\eta \nabla \eta) = 0,$$



## Ölunfall



$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \nabla \cdot (\eta \nabla \eta) - \nabla \cdot (\eta \nabla \eta) = 0,$$



# Tsunami

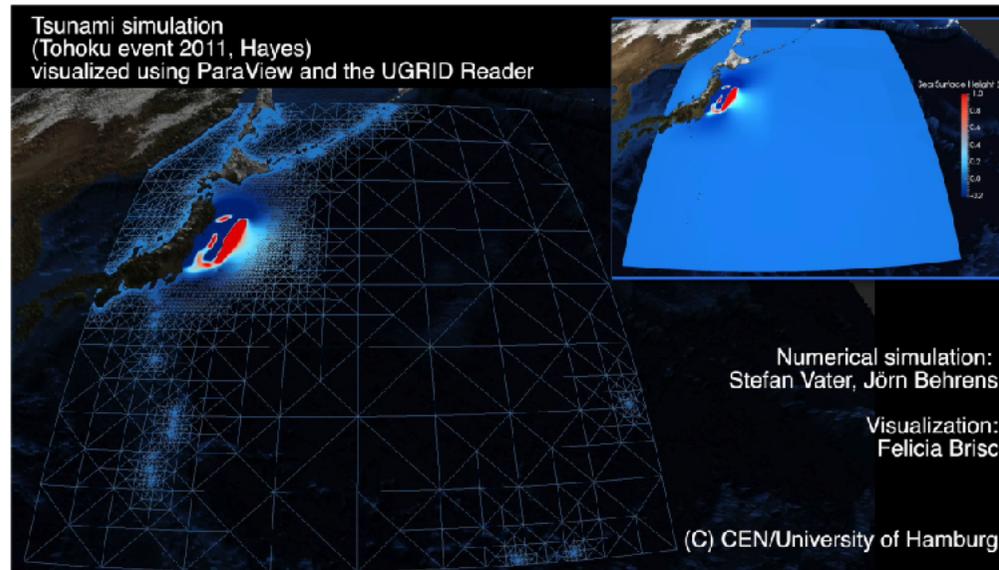


$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + g \nabla \eta = R,$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (H \mathbf{v}) = 0.$$

$$R = -f \mathbf{k} \times \mathbf{v} - r H^{-1} \mathbf{v} |\mathbf{v}| + H^{-1} \nabla (K_h H \nabla \mathbf{v})$$

Terms:

- Coriolis
- Bottom friction
- Viscosity (Smagorinsky approach)



jijicom

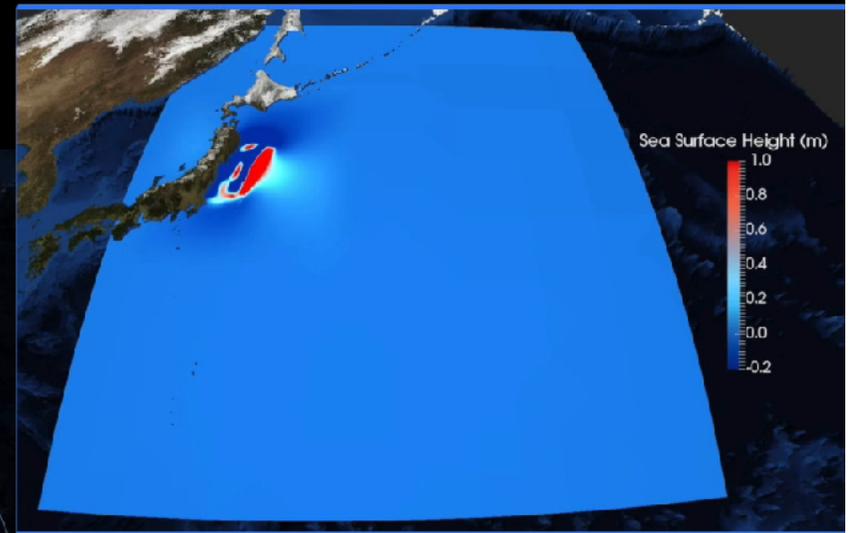
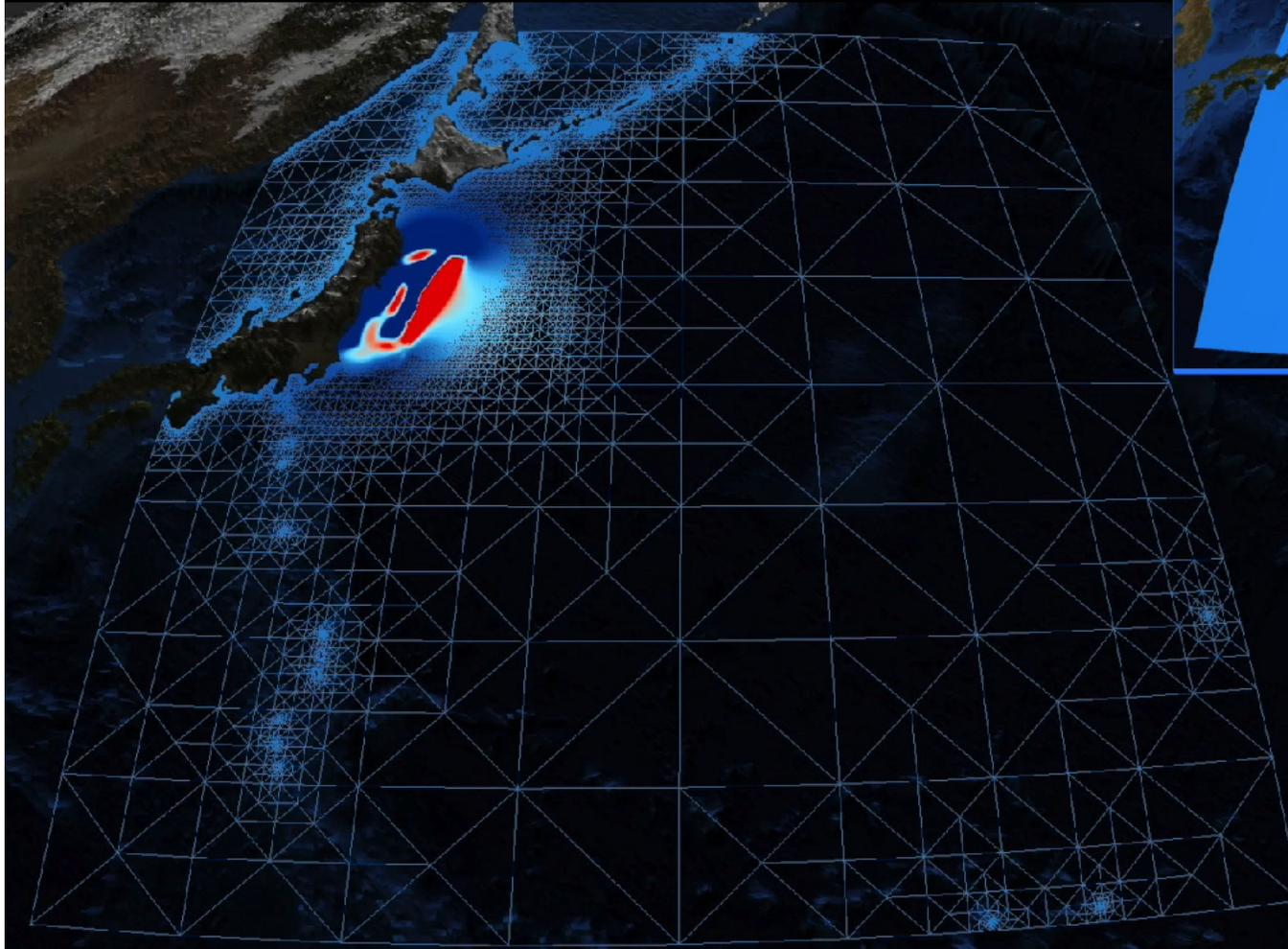
岩手県久慈港  
3月11日午後3時すぎ



国交省東北地方整備局釜石港湾事務所 撮影

- Coriolis
- Bottom friction
- Viscosity (Smagorinsky approach)

Tsunami simulation  
(Tohoku event 2011, Hayes)  
visualized using ParaView and the UGRID Reader



Numerical simulation:  
Stefan Vater, Jörn Behrens

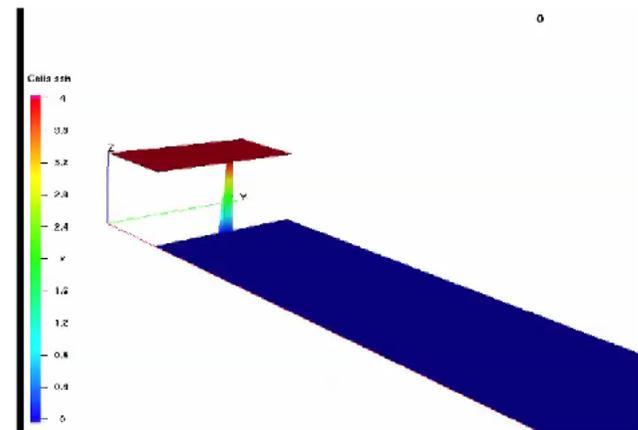
Visualization:  
Felicia Brisc

(C) CEN/University of Hamburg

# Sturmfluten

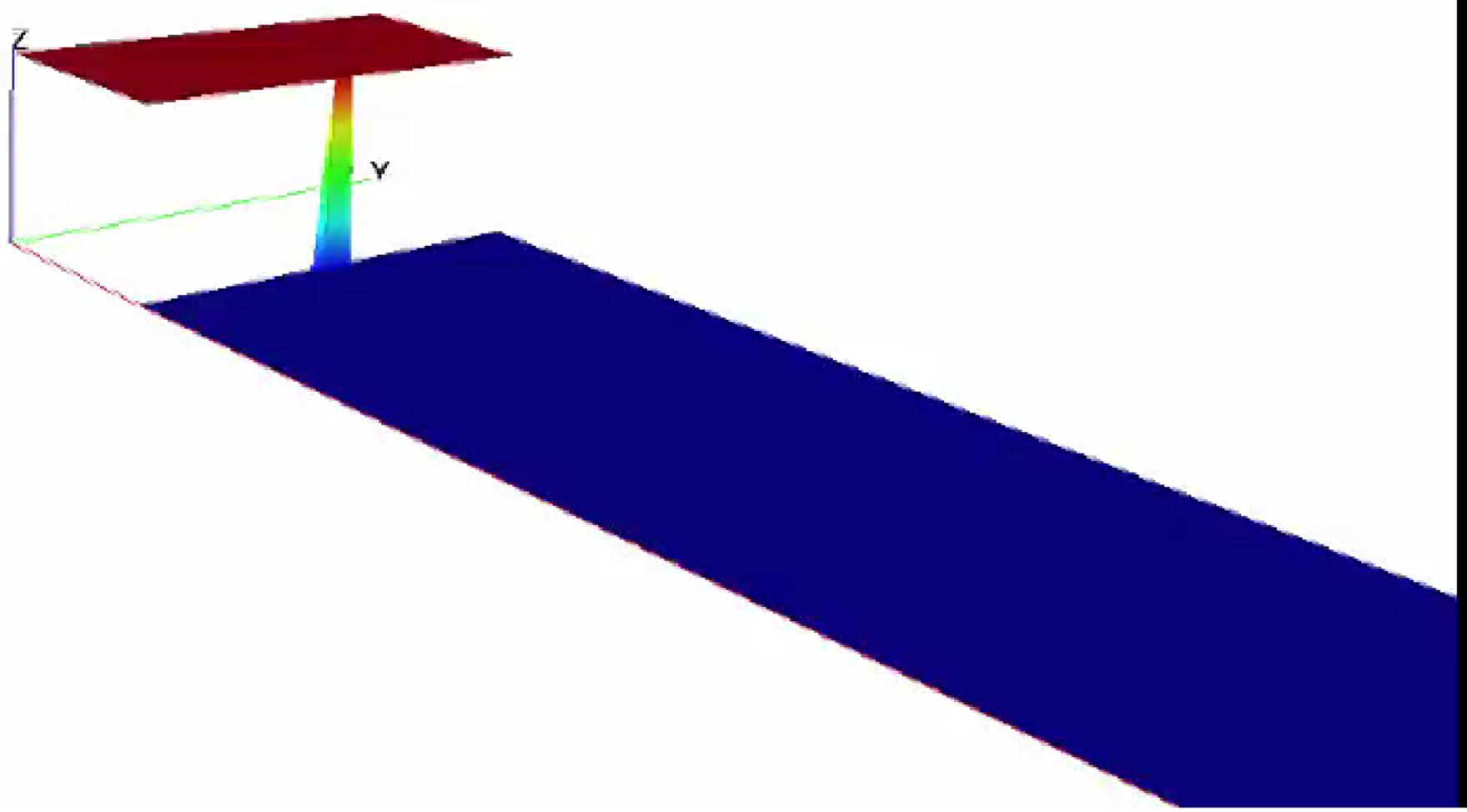
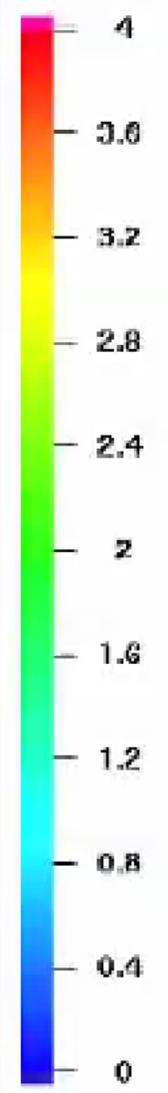


$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + g \nabla \eta = R,$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (H \mathbf{v}) = 0.$$





Cells esh



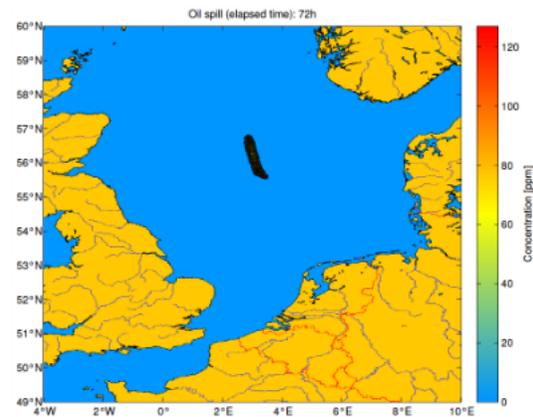
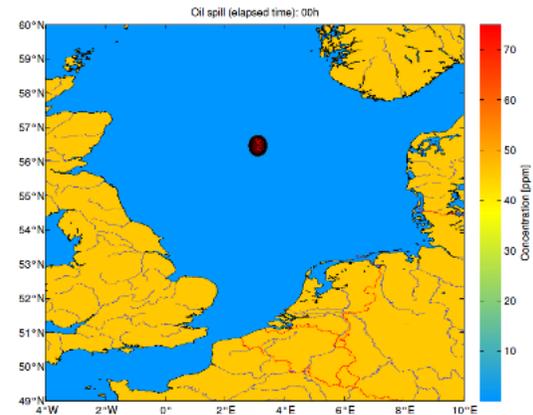
# Ölunfall



<http://tcktcktck.org/2014/07/wwf-arctic-oil-spill-spread-1000-km/>

$$\frac{\partial K_{oil}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} K_{oil} - \vec{\nabla} \cdot (k_d \vec{\nabla} K_{oil}) = \frac{R}{\rho_{oil}}$$

$$k_d = \frac{gh_{oil}^2 \rho_{oil} (\rho_w - \rho_{oil})}{\rho_w k_f}$$

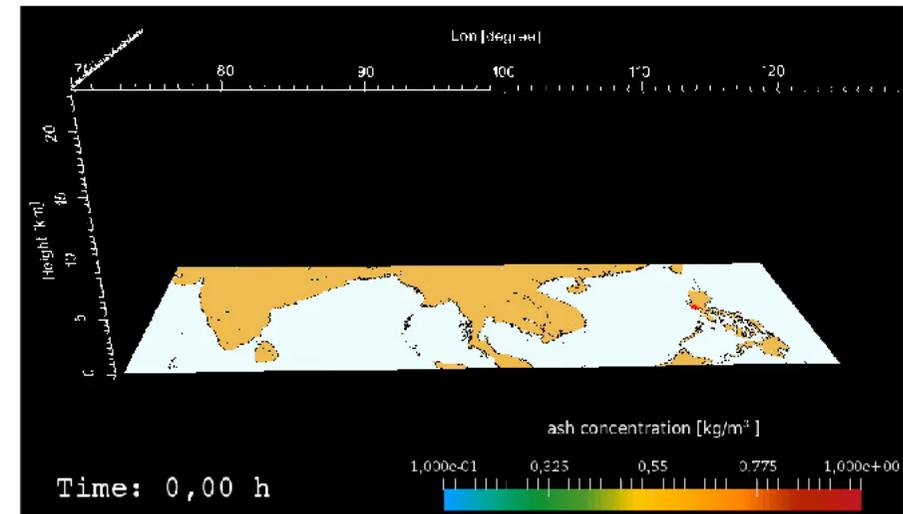


Source: Steffen Reinert (Study)

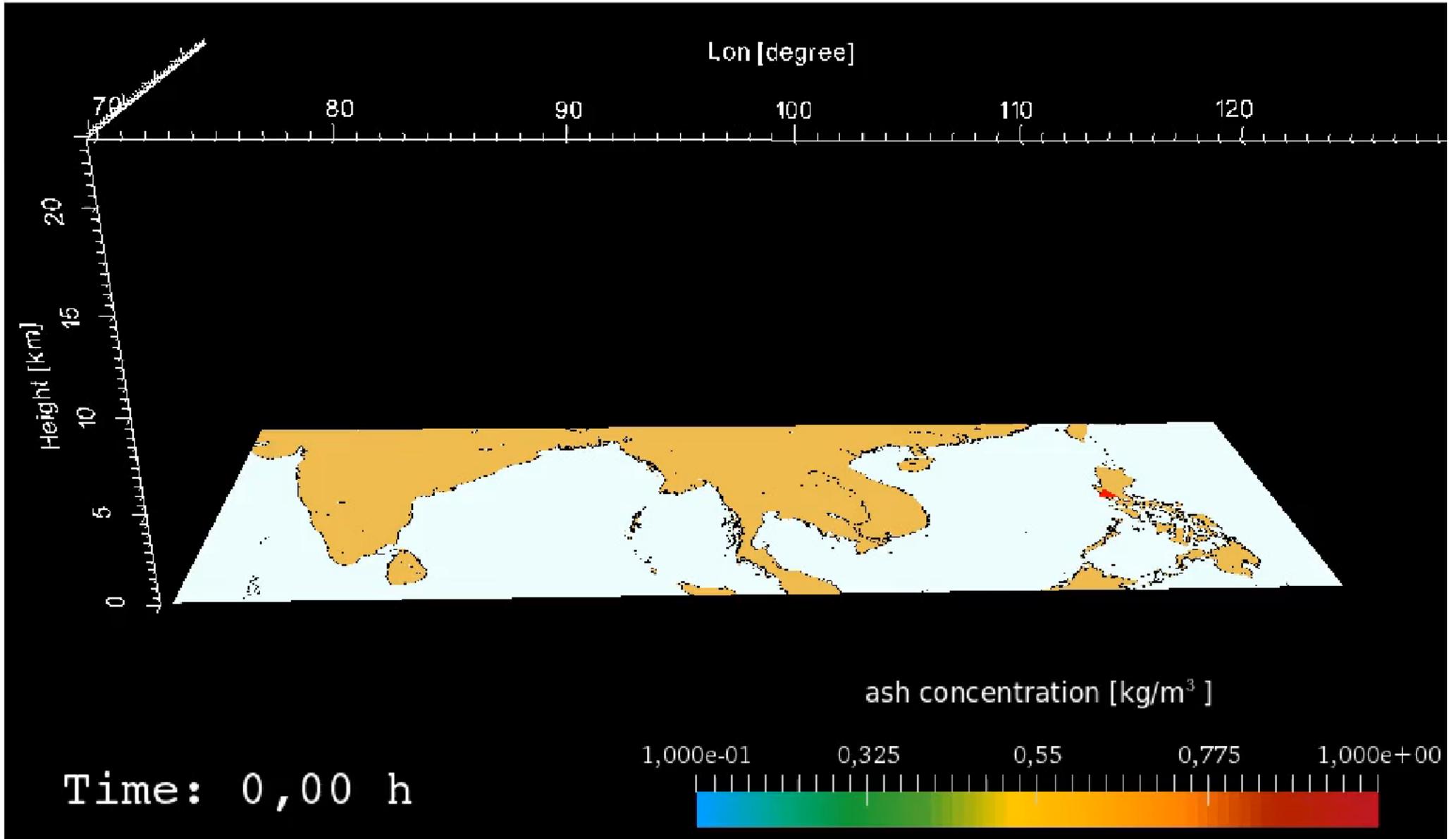
# Vulkanasche Ausbreitung



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\rho) + \nabla(v\nabla\rho) = S(\rho)$$



Source: Elena Gerwing, Matthias Hort, J.B. (MSc Project)



Source: Elena Gerwing, Matthias Hort, J.B. (MSc Project)

