Differentialgleichungen II

Sommer 2018

Einführung in numerische Methoden

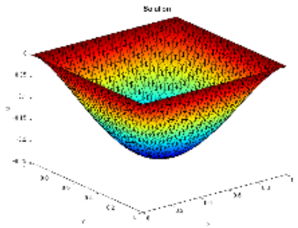
Vorbemerkungen

Zur numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen verwendete Verfahrensklassen:

- **Finite Differenzen**
  - Vereinfachung des Differentialoperators, alle Gleichungstypen, einfache Geometrien und strukturierte uniforme Gitter
- **Finite Volumen**
  - Vereinfachung des physikalischen Prinzips, vornehmlich hyperbolische Gleichungen
- **Finite Elemente**
  - Vereinfachung der Funktionenräume, vornehmlich elliptische Gleichungen, komplizierte Geometrien und Differentialoperatoren
- **Lagrangesche Methoden**
  - Vereinfachung der totalen Ableitung, Transportgleichungen
- **Kombinationen** aus den vorherigen Methoden

Betrachte: Elliptisches Modellproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \text{in } \Omega = [0,1]^2 \in \mathbb{R}^2 \\ u &= 0 \qquad \text{on } \partial\Omega \end{aligned}$$

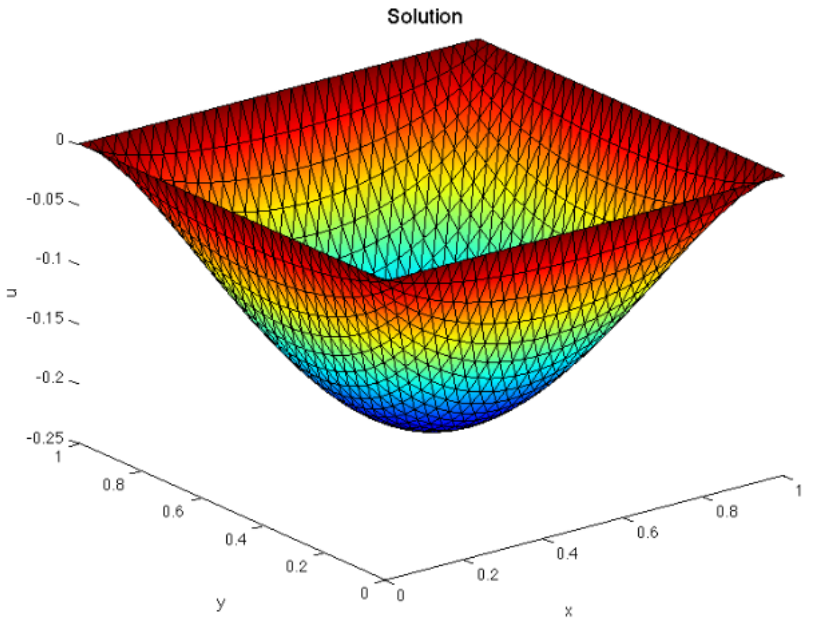


Zur numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen verwendete Verfahrensklassen:

- **Finite Differenzen**
  - Vereinfachung des Differentialoperators, alle Gleichungstypen, einfache Geometrien und strukturierte uniforme Gitter
- **Finite Volumen**
  - Vereinfachung des physikalischen Prinzips, vornehmlich hyperbolische Gleichungen
- **Finite Elemente**
  - Vereinfachung der Funktionenräume, vornehmlich elliptische Gleichungen, komplizierte Geometrien und Differentialoperatoren
- **Lagrangesche Methoden**
  - Vereinfachung der totalen Ableitung, Transportgleichungen
- **Kombinationen** aus den vorherigen Methoden

Betrachte: Elliptisches Modellproblem

$$-\Delta u = f \qquad \text{in } \Omega = [0,1]^2 \in \mathbb{R}^2$$
$$u = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega$$



Finite Differenzen

Idee:

Diskretisiere den Differenzialoperator

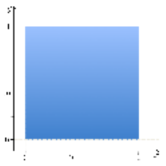
$$-\Delta = L \approx L_h$$

hier: $\frac{du}{dx} = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad \Delta x = x_{i+1} - x_i$

Gitter:

$$x_i = i \cdot \Delta x$$
$$\Delta x = x_{i+1} - x_i$$
$$i = 0 : N$$
$$N = \frac{1}{\Delta x}$$

y_j analogously



Lineares Gleichungssystem:

$$L_h u_h = f_h$$

wobei mit $\Delta u = f$

- L_h die Matrix der letzten Folie,
- u_h der Vektor aller unbekannten Gitterwerte von u,
- f_h der Vektor der Gitterwerte der rechten Seite f ist.

Diskreter Operator:

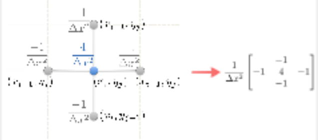
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

$$-\Delta u = \frac{4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

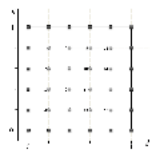
Matrix:

Finite Differenzen Stern:



Nummerierung:

Lexikographische Ordnung



Idee:

Diskretisiere den Differenzialoperator

$$-\Delta = L \approx L_h$$

hier: $$\frac{du}{dx} = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x), \quad \Delta x = x_{i+1} - x_i.$$

Gitter:

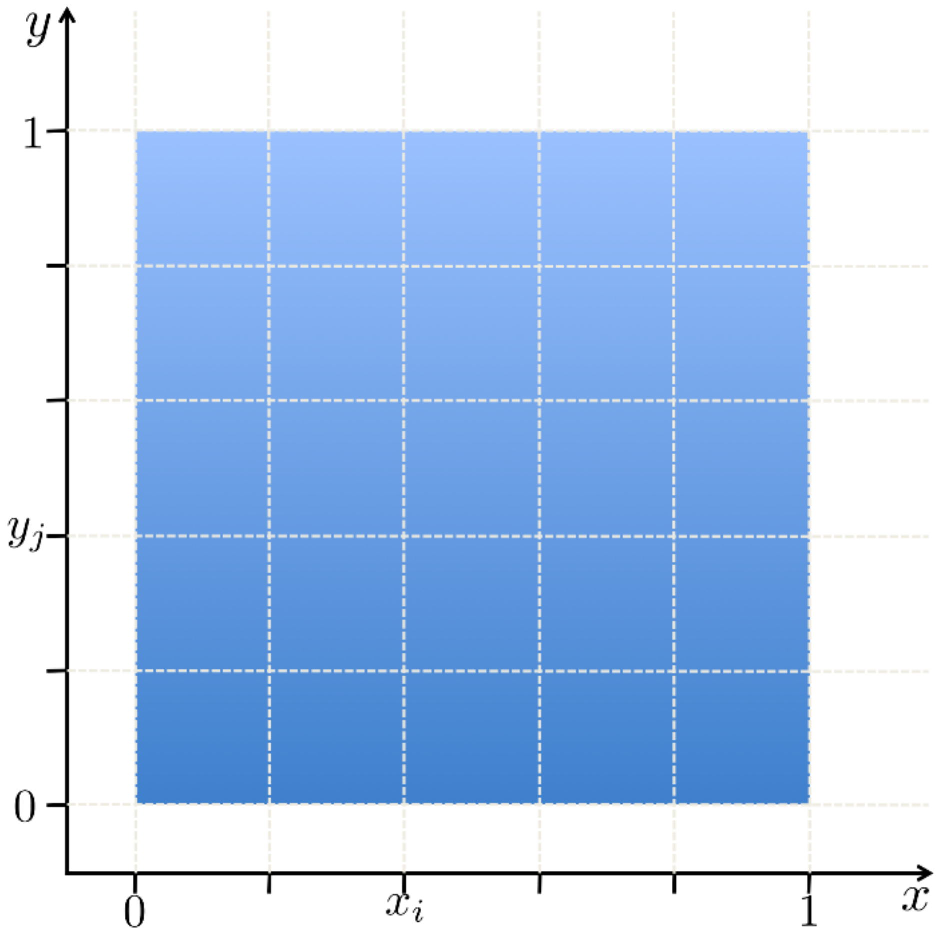
$$x_i = i \cdot \Delta x$$

$$\Delta x = x_{i+1} - xi$$

$$i = 0 : N$$

$$N = \frac{1}{\Delta x}$$

y_j analogously



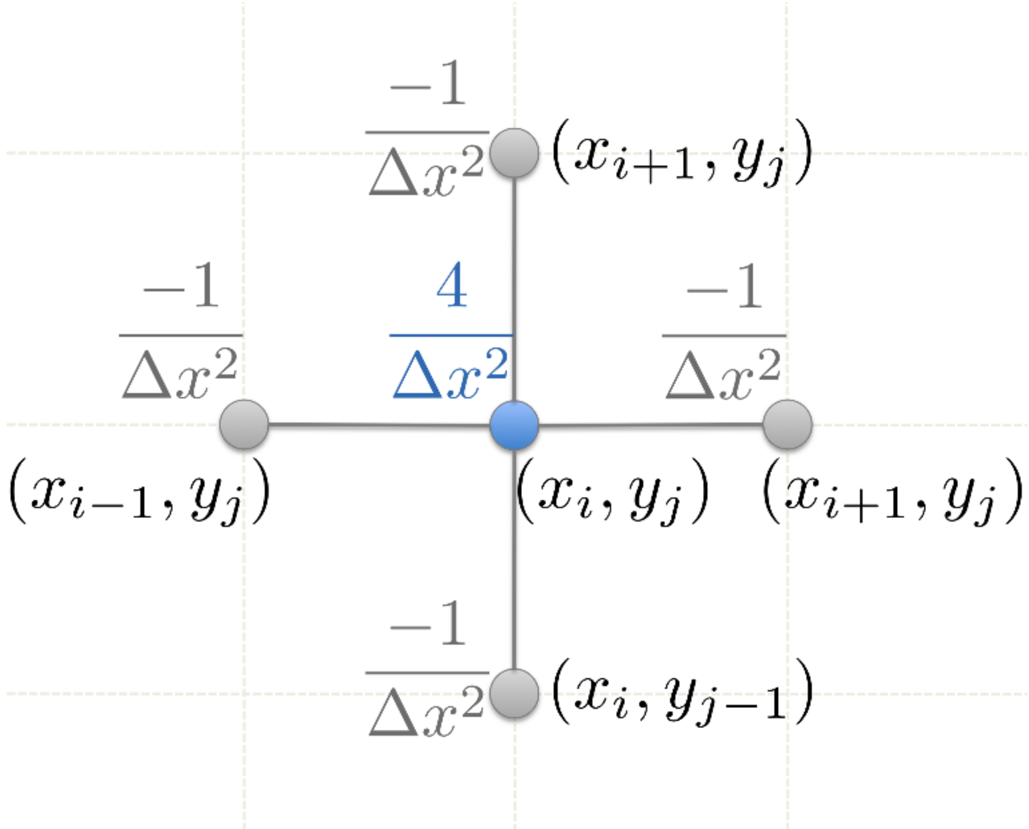
Diskreter Operator:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

$$-\Delta u = \frac{4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

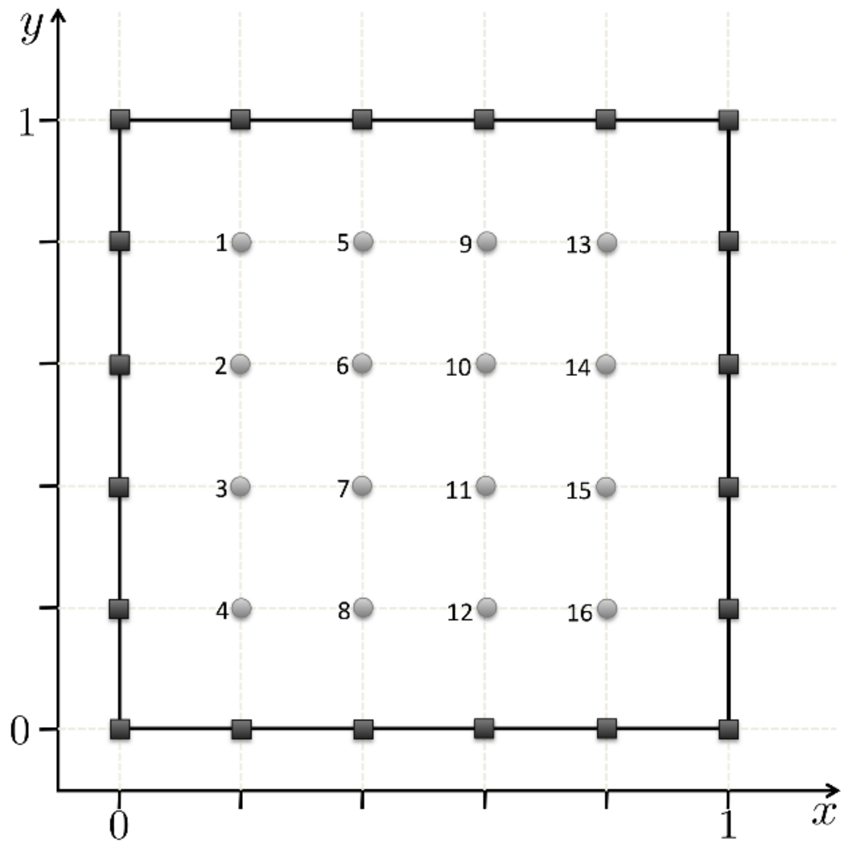
Finite Differenzen Stern:

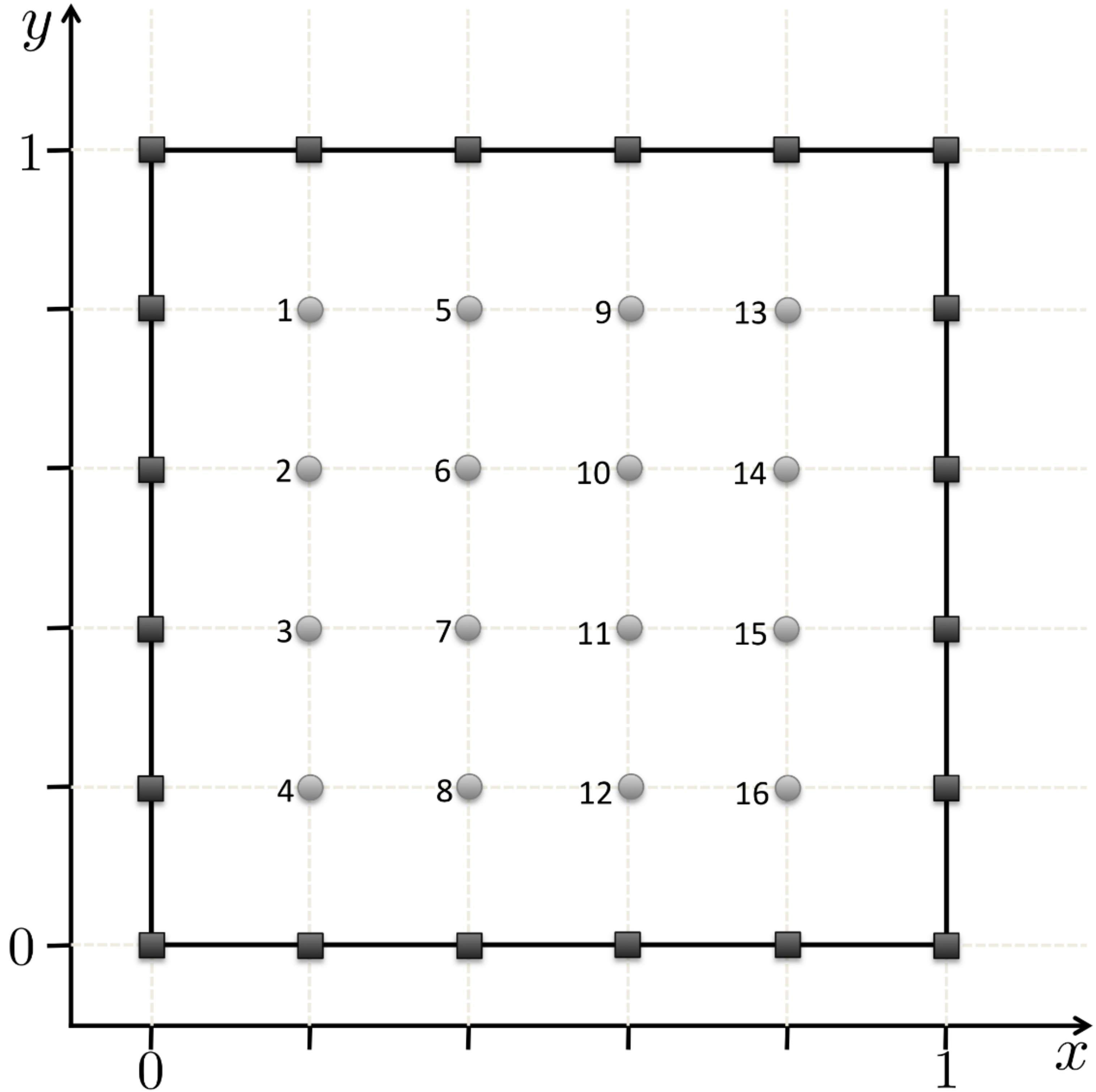


$$\rightarrow \frac{1}{\Delta x^2}\begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix}$$

Nummerierung:

Lexikographische Ordnung





y
1
0
x
0
1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16

Matrix:

$$\frac{1}{\Delta x^2}\begin{bmatrix}
4 & -1 & & & -1 & & & & & & & & & & & \\
-1 & 4 & -1 & & & -1 & & & & & & & & & & \\
& -1 & 4 & -1 & & & -1 & & & & & & & & & \\
& & -1 & 4 & & & & -1 & & & & & & & & \\
-1 & & & & 4 & -1 & & & -1 & & & & & & & \\
& -1 & & & -1 & 4 & -1 & & & -1 & & & & & & \\
& & -1 & & & -1 & 4 & -1 & & & -1 & & & & & \\
& & & -1 & & & -1 & 4 & & & & -1 & & & & \\
& & & & -1 & & & & 4 & -1 & & & -1 & & & \\
& & & & & -1 & & & -1 & 4 & -1 & & & -1 & & \\
& & & & & & -1 & & & -1 & 4 & -1 & & & -1 & \\
& & & & & & & -1 & & & -1 & 4 & & & & -1 \\
& & & & & & & & -1 & & & & 4 & -1 & & \\
& & & & & & & & & -1 & & & -1 & 4 & -1 & \\
& & & & & & & & & & -1 & & & -1 & 4 & -1 \\
& & & & & & & & & & & -1 & & & -1 & 4
\end{bmatrix}$$

Lineares Gleichungssystem:

$$L_h u_h = f_h$$

wobei mit $-\Delta u = f$

- L_h die Matrix der letzten Folie,
- u_h der Vektor aller unbekannten Gitterwerte von u,
- f_h der Vektor der Gitterwerte der rechten Seite f ist.

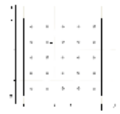
Finite Volumen

Idee:

Diskretisiere die Flussform

Zellen:

Überdecke Ω durch Zellen (Volumina) $E_1, \ldots, E_N$



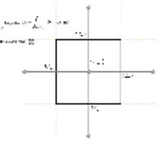
Integration:

$$\int_{E_i} -\Delta u \; dx = \int_{E_i} f \; dx \quad \forall i = 1 : N$$

Gauß' theorem

$$-\int_{\partial E_i} \frac{\partial u}{\partial n} \; ds = \int_{E_i} f \; dx$$

Diskretisierung



Vereinfachte Schreibweise:

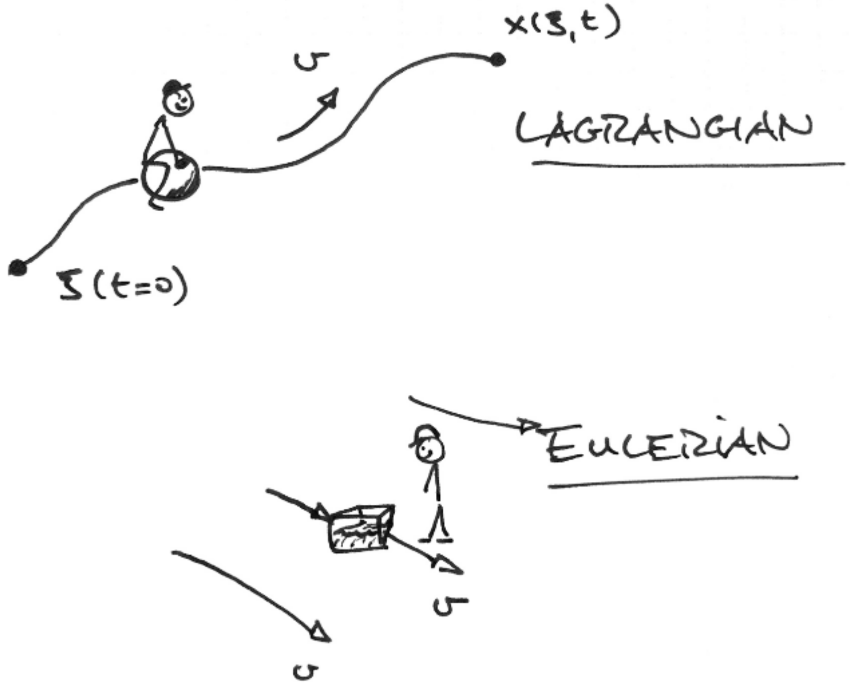
$$4u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = \Delta x^2 \bar{f}_{i,j}.$$

Lineares Gleichungssystem:

$$L_h u_h = f_h$$

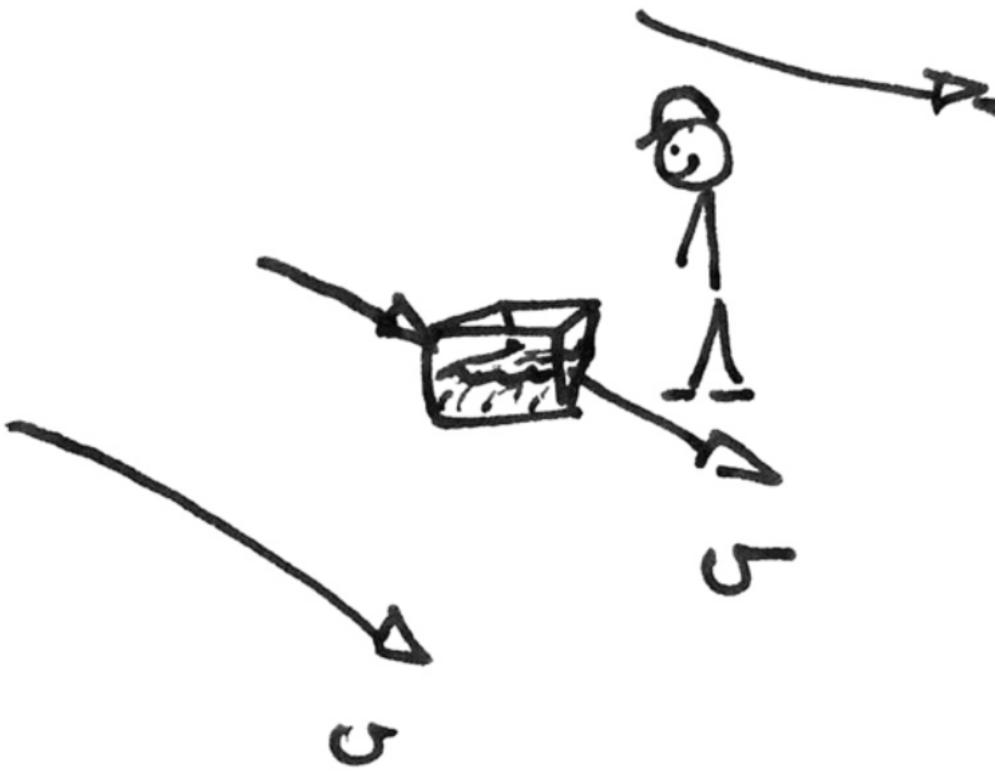
Idee:

Diskretisiere die Flussform



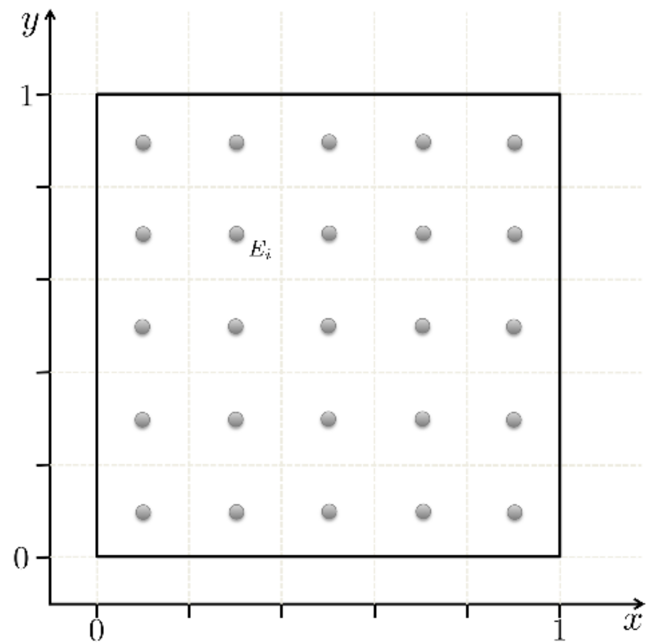
(t=0)

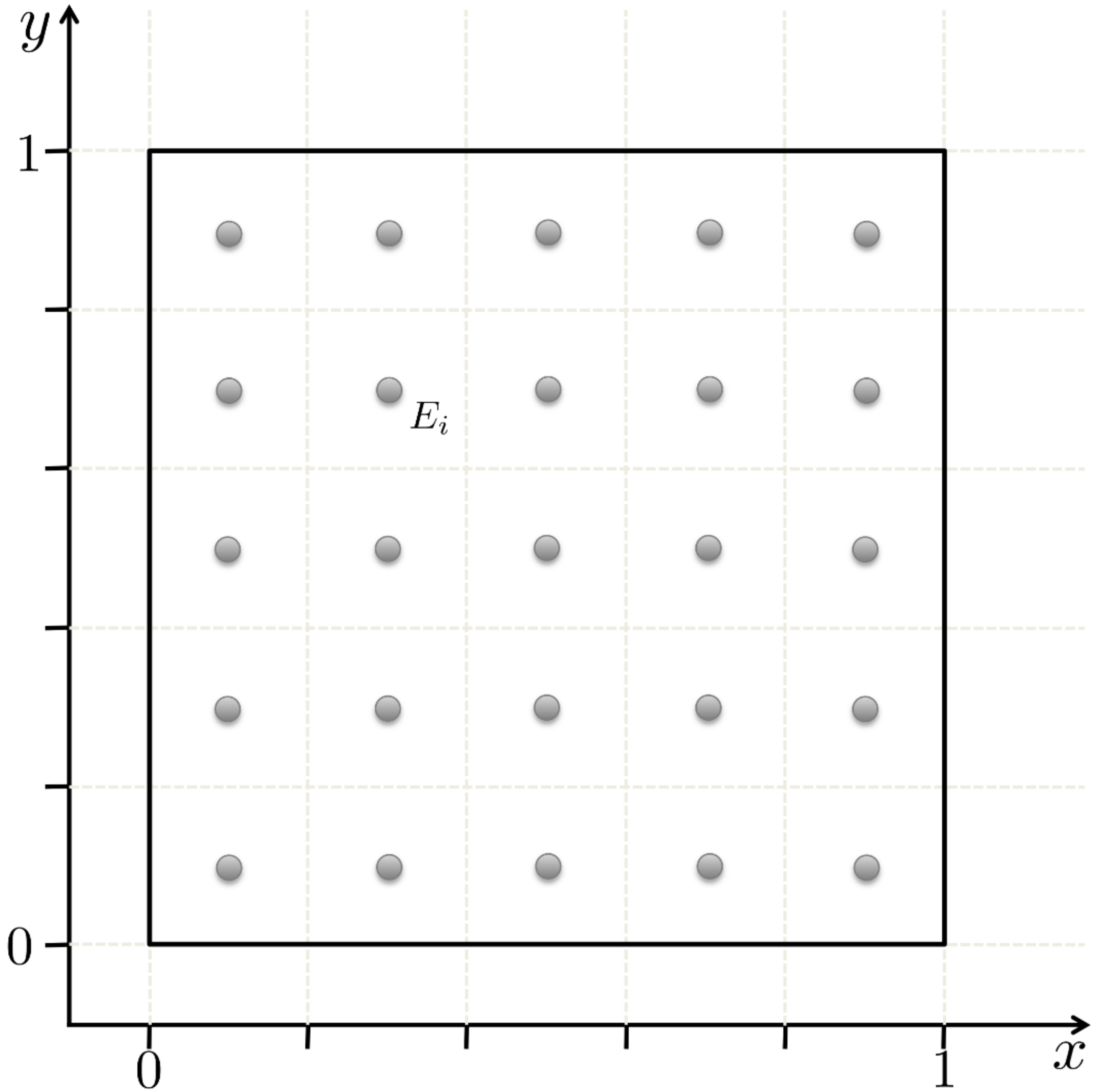
EULERIAN



Zellen:

Überdecke Ω durch Zellen (Volumina) $E_1, \ldots, E_N$:





y
1
0
E_i
0
1
x

Integration:

$$\int_{E_i} -\Delta u \; dx = \int_{E_i} f \; dx \quad \forall i = 1 : N$$

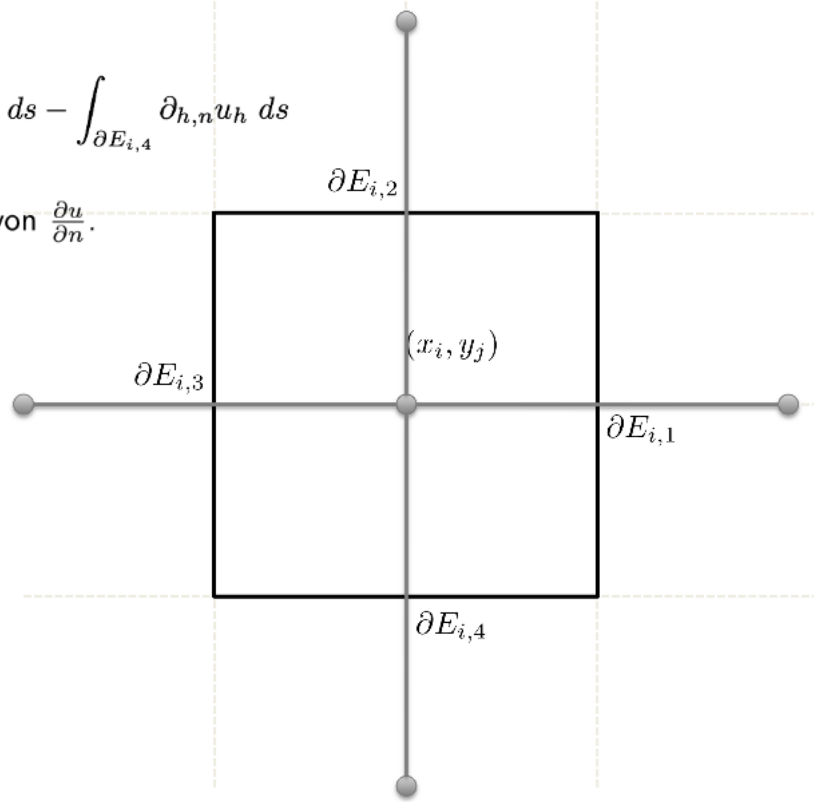
$$\| \qquad \text{Gauß}' \text{ theorem}$$

$$-\int_{\partial E_i} \frac{\partial u}{\partial n} \; ds = \int_{E_i} f \; dx$$

Diskretisierung

$$\int_{E_i} f\ dx = -\int_{\partial E_i} \frac{\partial u}{\partial n}\ ds$$
$$\approx -\int_{\partial E_{i,1}} \partial_{h,n} u_h\ ds - \int_{\partial E_{i,2}} \partial_{h,n} u_h\ ds - \int_{\partial E_{i,3}} \partial_{h,n} u_h\ ds - \int_{\partial E_{i,4}} \partial_{h,n} u_h\ ds$$

$\partial_{h,n} u_h$: Finite Differenzen Approximation von $\frac{\partial u}{\partial n}$.



$$\int_{\partial E_{i,1}} \partial_{h,n} u_h\ ds = \Delta x \cdot \left[\frac{u_h(x_{i+1}, y_j) - u_h(x_i, y_j)}{\Delta x}\right]$$

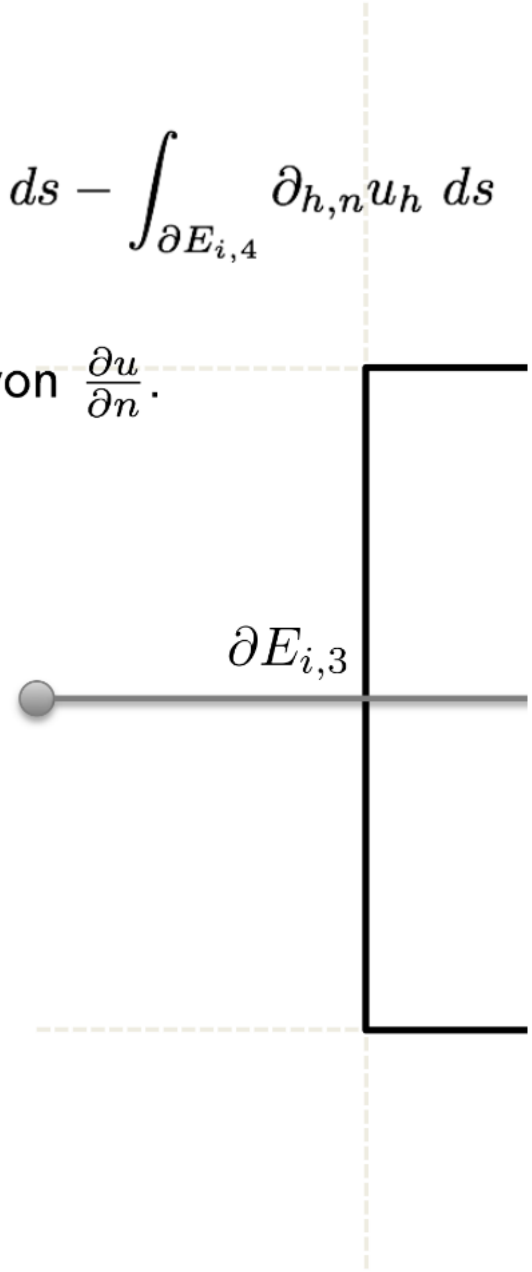
$$\int_{\partial E_{i,2}} \partial_{h,n} u_h\ ds = \Delta x \cdot \left[\frac{u_h(x_i, y_{j+1}) - u_h(x_i, y_j)}{\Delta x}\right]$$

$$\int_{\partial E_{i,3}} \partial_{h,n} u_h\ ds = \Delta x \cdot \left[\frac{u_h(x_{i-1}, y_j) - u_h(x_i, y_j)}{\Delta x}\right]$$

$$\int_{\partial E_{i,4}} \partial_{h,n} u_h\ ds = \Delta x \cdot \left[\frac{u_h(x_i, y_{j-1}) - u_h(x_i, y_j)}{\Delta x}\right]$$

$$\int_{E_i} f \; dx = - \int_{\partial E_i} \frac{\partial u}{\partial n} \; ds$$
$$\approx - \int_{\partial E_{i,1}} \partial_{h,n} u_h \; ds - \int_{\partial E_{i,2}} \partial_{h,n} u_h \; ds - \int_{\partial E_{i,3}} \partial_{h,n} u_h \; ds - \int_{\partial E_{i,4}} \partial_{h,n} u_h \; ds$$

$\partial_{h,n} u_h$: Finite Differenzen Approximation von $\frac{\partial u}{\partial n}$.



$$\int_{\partial E_{i,1}} \partial_{h,n} u_h \; ds = \Delta x \cdot \left[\frac{u_h(x_{i+1}, y_j) - u_h(x_i, y_j)}{\Delta x} \right]$$

$$\int_{\partial E_{i,2}} \partial_{h,n} u_h \; ds = \Delta x \cdot \left[\frac{u_h(x_i, y_{j+1}) - u_h(x_i, y_j)}{\Delta x} \right]$$

$$\int_{\partial E_{i,3}} \partial_{h,n} u_h \; ds = \Delta x \cdot \left[\frac{u_h(x_{i-1}, y_j) - u_h(x_i, y_j)}{\Delta x} \right]$$

$$\int \quad \left[u_h(x_i, y_{j-1}) - u_h(x_i, y_j) \right]$$

Vereinfachte Schreibweise:

$$u_{i,j} = u_h(x_i, y_j)$$

$$\bar{f}_{i,j} = \frac{1}{|E_{i,j}|} \int_{E_{i,j}} f \; dx$$

$$4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = \Delta x^2 \bar{f}_{i,j}.$$

Lineares Gleichungssystem:

$$L_h u_h = f_h$$

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccc}
4 & -1 & & & -1 & & & & & & & & & & & \\
-1 & 4 & -1 & & & -1 & & & & & & & & & & \\
 & -1 & 4 & -1 & & & -1 & & & & & & & & & \\
 & & -1 & 4 & & & & -1 & & & & & & & & \\
-1 & & & & 4 & -1 & & & -1 & & & & & & & \\
 & -1 & & & -1 & 4 & -1 & & & -1 & & & & & & \\
 & & -1 & & & -1 & 4 & -1 & & & -1 & & & & & \\
 & & & -1 & & & -1 & 4 & & & & -1 & & & & \\
 & & & & -1 & & & & 4 & -1 & & & -1 & & & \\
 & & & & & -1 & & & -1 & 4 & -1 & & & -1 & & \\
 & & & & & & -1 & & & -1 & 4 & -1 & & & -1 & \\
 & & & & & & & -1 & & & -1 & 4 & & & & -1 \\
 & & & & & & & & -1 & & & & 4 & -1 & & \\
 & & & & & & & & & -1 & & & -1 & 4 & -1 & \\
 & & & & & & & & & & -1 & & & -1 & 4 & -1 \\
 & & & & & & & & & & & -1 & & & -1 & 4
\end{array}\right]$$

mit

- L_h die Matrix (rechts),
- u_h der Vektor aller Zellwerte,
- f_h der Vektor mit Zellmittelwerten

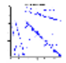
$$\int_{E_i} f \; dx \approx \Delta x^2 \cdot \overline{f(x_{E_i})}$$

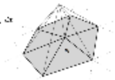
Finite Elemente

Idee:

"Diskretisiere Funktionen Raum"

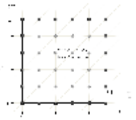
Finites Element





Variations-Problem

Triangulierung



Ersetze die Funktionen(räume)

statt des Problems

finde $u \in V: \quad J(u) = \min_{v \in V} J(v)$

lösen wir das diskrete Problem

finde $u_h \in V_h: \quad J(u_h) = \min_{v_h \in V_h} J(v_h)$

Galerkin Methode

Nun wird das Variations-Problem $a(u_h, v_h) = f(v_h)$ ersetzt durch

$$u_i \cdot a(\varphi_i, \varphi_j) = f(\varphi_j), \quad \forall i, j = 1, \ldots, N,$$

da $u_h = \sum u_i \varphi_i$.

Man erhält wieder: $L_h u_h = f_h$

Funktionenraum

- V: Funktionenraum mit $\dim V = \infty$;
- V_h: stückweise Polynome, in Ω stetig, $\dim V_h = N < \infty$.

Basisfunktionen Darstellung

$$u_h(x) = \sum_{i=1:N} u_i \varphi_i(x)$$

$$V_h = \operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$$

$$u_h \in V_h \quad \Rightarrow \quad u_h = \sum_{i=1}^{N} u_i \varphi_i$$

Idee:

"Diskretisiere Funktionen Raum"

Variations-Problem

Klassisches Problem

$$
\begin{aligned}
-\Delta u = f \quad &\text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\
u = 0 \quad &\text{on } \partial\Omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad & u = 0 \text{ on } \partial\Omega, \\
\Rightarrow \int_\Omega -\Delta u \varphi \, dx &= \int_\Omega f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \\
\Rightarrow \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx &= \int_\Omega f \varphi \, dx \quad \forall \varphi
\end{aligned}
$$

Variations-Problem

$$a(u,v) = f(v) \quad \forall v$$

mit

$$
\begin{aligned}
a(u,v) &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\
f(v) &= \int_\Omega f v \, dx
\end{aligned}
$$

Minimierungs-Problem

finde $u \in V: \quad J(u) = \min_{v \in V} J(v)$

mit

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - f(v)$$

Klassisches Problem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

$$u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \text{ on } \partial\Omega,$$

$$\Rightarrow \int_\Omega -\Delta u \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx \quad \forall \varphi$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx \quad \forall \varphi$$

Variations-Problem

$$a(u,v) = f(v) \quad \forall v$$

mit

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx$$

$$f(v) = \int_\Omega f v \; dx$$

Minimierungs-Problem

finde $u \in V$: $$J(u) = \min_{v \in V} J(v)$$

mit

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - f(v)$$

Ersetze die Funktionen(räume)

statt des Problems

$$\text{finde } u \in \ V: \quad J(u) = \min_{v \in V} J(v)$$

lösen wir das diskrete Problem

$$\text{finde } u_h \in \ V_h: \quad J(u_h) = \min_{v_h \in V_h} J(v_h)$$

Funktionenraum

- V: Funktionenraum mit $\dim V = \infty$;
- V_h: stückweise Polynome, in Ω stetig, $\dim V_h = N < \infty$.

Basisfunktionen Darstellung

$$u_h(x) = \sum_{i=1:N} u_i \varphi_i(x)$$

$$V_h = \operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$$

$$v_h \in V_h \quad \Rightarrow \quad v_h = \sum_{i=1}^{N} v_i \varphi_i$$

dabei ist

- $v_i \in \mathbb{R}$ Koeffizienten,
- $\varphi_i \in V_h$: Basis-Polynome.

Galerkin Methode

Nun wird das Variations-Problem $a(u_h, v_h) = f(v_h)$ ersetzt durch

$$u_i \cdot a(\varphi_i, \varphi_j) = f(\varphi_j), \quad \forall i, j = 1, \ldots, N,$$

da $u_h = \sum u_i \varphi_i$.

Man erhält wieder: $L_h u_h = f_h$

mit

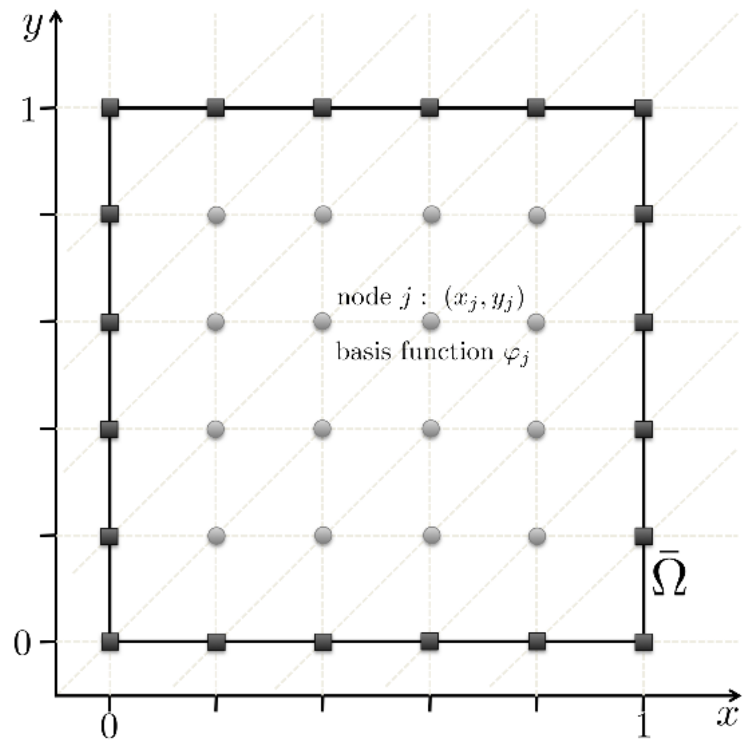
- $(L_h)_{i,j} = a(\varphi_i, \varphi_j)$ Matrix,
- $u_h = (u_1, \ldots, u_N)^\top$ der Vektor der Koeffizienten,
- $(f_h)_j = f(\varphi_j)$ Vektor.

Triangulierung

Überdecke $\overline{\Omega}$ mit Menge T_h disjunkter Simplices:

- $\overline{\Omega} = \bigcup_{\tau \in T_h} \tau$
- Falls $\tau_1, \tau_2 \in T_h$ mit $\tau_1 \neq \tau_2$, so gilt $\mathring{\tau}_1 \cap \mathring{\tau}_1 = \emptyset$.
- Falls $\tau_1, \tau_2 \in T_h$ mit $\tau_1 \neq \tau_2$, dann gelte:

$$\overline{\tau_1} \cap \overline{\tau_2} = \begin{cases} \emptyset, \text{ oder} \\ \text{gemeinsame Kante, oder} \\ \text{gemeinsamer Knoten.} \end{cases}$$



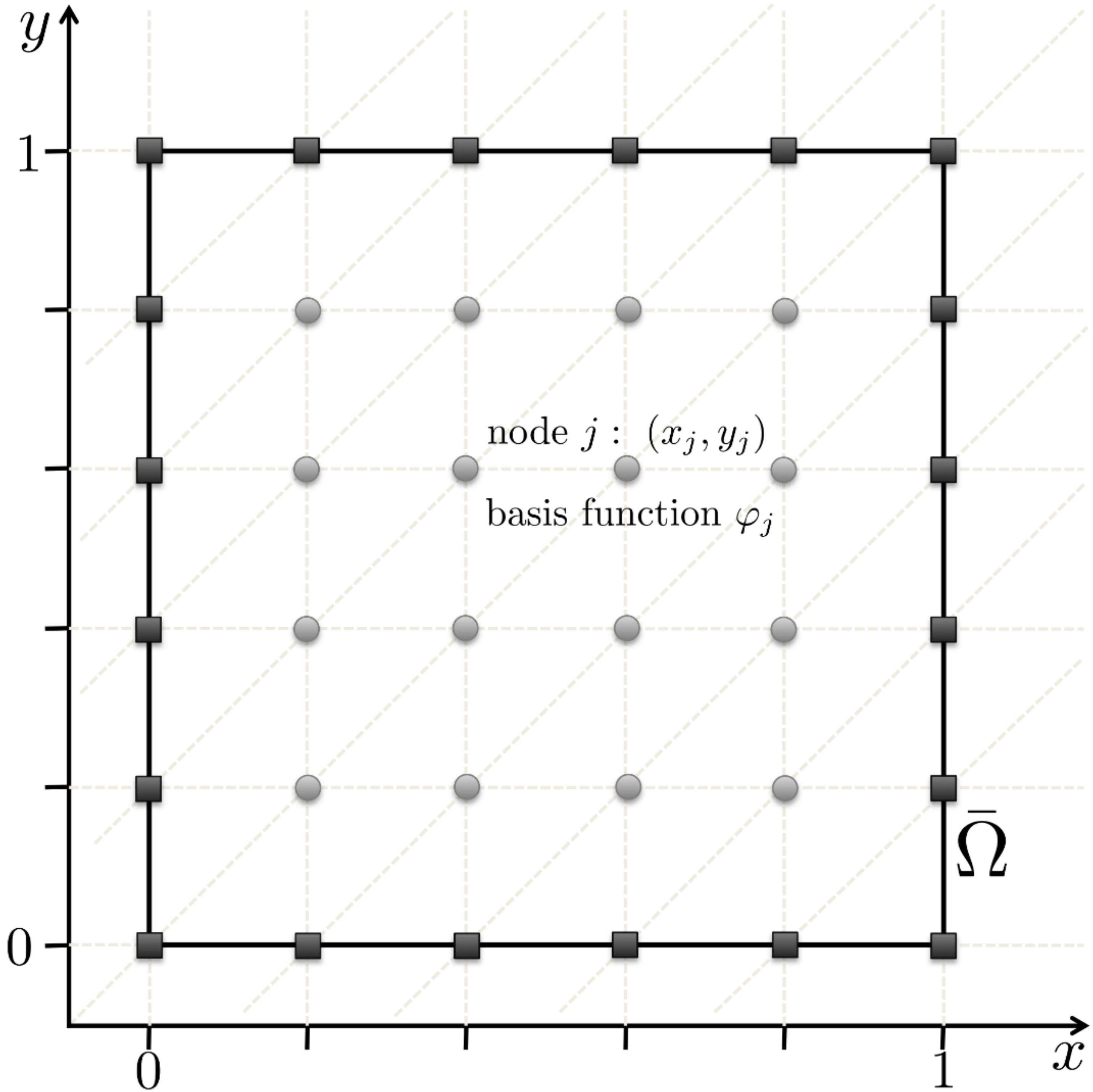
Überdecke $\overline{\Omega}$ mit Menge T_h disjunkter Simplices:

- $\overline{\Omega} = \bigcup_{\tau \in T_h} \tau$
- Falls $\tau_1, \tau_2 \in T_h$ mit $\tau_1 \neq \tau_2$, so gilt $\mathring{\tau}_1 \cap \mathring{\tau}_1 = \emptyset$.
- Falls $\tau_1, \tau_2 \in T_h$ mit $\tau_1 \neq \tau_2$, dann gelte:

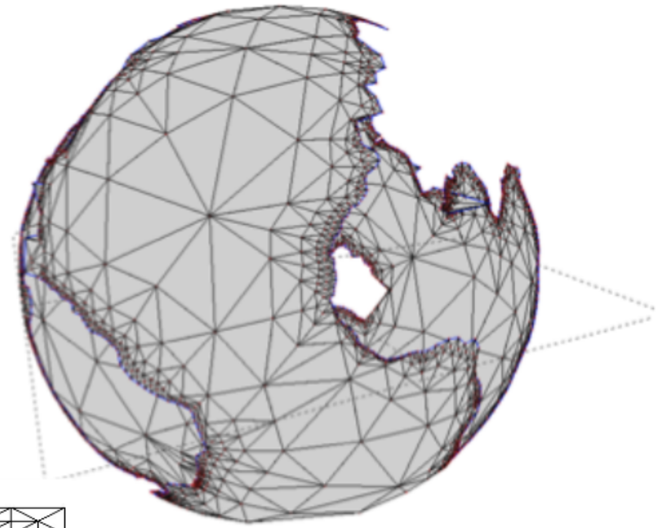
$$\overline{\tau_1} \cap \overline{\tau_2} = \begin{cases} \emptyset, \text{ oder} \\ \text{gemeinsame Kante, oder} \\ \text{gemeinsamer Knoten.} \end{cases}$$

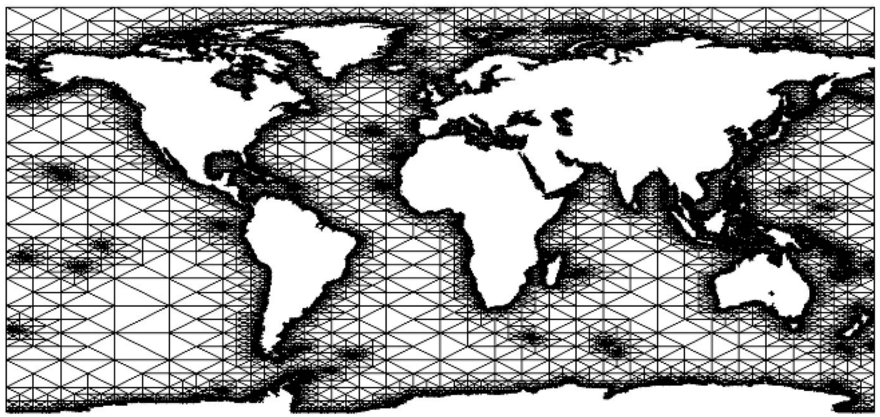
).

nte, oder
ioten.



Triangulierungen aus Anwendungen:

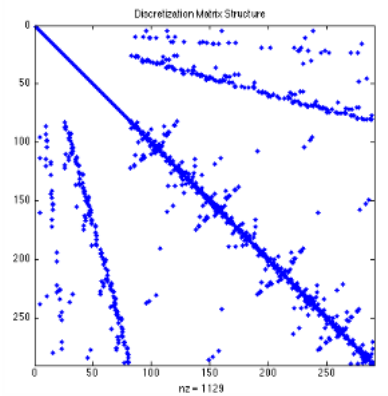


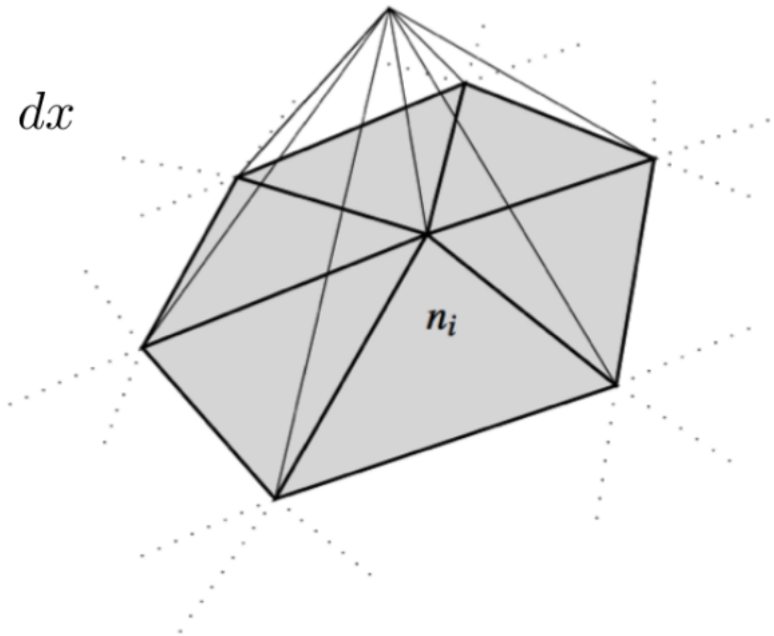


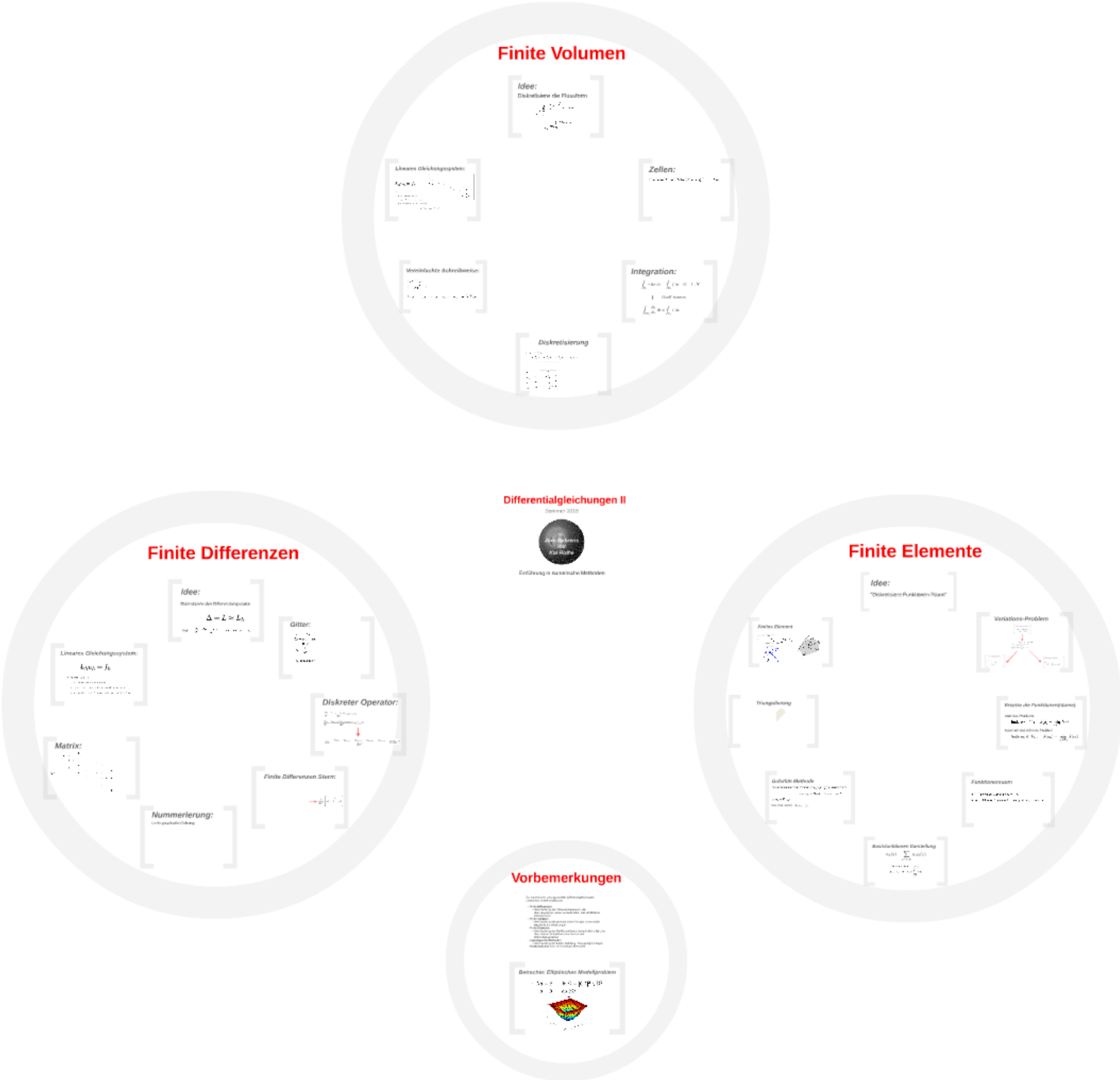
Finites Element

$$a_{ik} \quad = \quad a(\phi_i, \phi_k)$$

$$a_{ik} = \sum_{\tau \in (\mathrm{supp}(\phi_i) \cap \mathrm{supp}(\phi_j))} \int_\tau \nabla\phi_i \nabla\phi_j \; dx$$






Finite Volumen
Idee:
Diskretisiere die Flussform
Zellen:
Lineares Gleichungssystem:
Vereinfachte Schreibweise:
Integration:
Diskretisierung
Differentialgleichungen II
Einführung in numerische Methoden
Finite Differenzen
Idee:
$\Delta = L \approx L_h$
Gitter:
Lineares Gleichungssystem:
$L_h u_h = f_h$
Diskreter Operator:
Matrix:
Finite Differenzen Stern:
Nummerierung:
Finite Elemente
Idee:
Variations-Problem
Vorbemerkungen
Betrachte: Elliptisches Modellproblem