

Differentialgleichungen II

Sommer 2018



Einführung in numerische Methoden

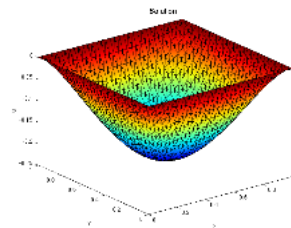
Vorbemerkungen

Zur numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen
verwendete Verfahrensklassen:

- **Finite Differenzen**
 - Vereinfachung des Differentialoperators, alle Gleichungstypen, einfache Geometrien und strukturierte uniforme Gitter
- **Finite Volumen**
 - Vereinfachung des physikalischen Prinzips, vornehmlich hyperbolische Gleichungen
- **Finite Elemente**
 - Vereinfachung der Funktionenräume, vornehmlich elliptische Gleichungen, komplizierte Geometrien und Differentialoperatoren
- **Lagrangische Methoden**
 - Vereinfachung der totalen Ableitung, Transportgleichungen
- **Kombinationen** aus den vorherigen Methoden

Betrachte: Elliptisches Modellproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega = [0, 1]^2 \in \mathbb{R}^2 \\ u &= 0 & \text{on } \partial\Omega \end{aligned}$$



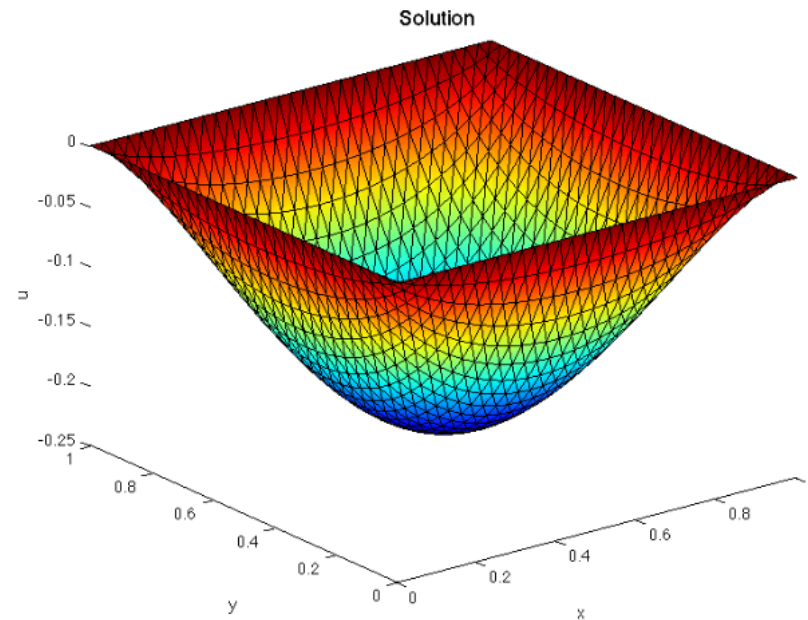


*Zur numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen
verwendete Verfahrensklassen:*

- **Finite Differenzen**
 - Vereinfachung des Differentialoperators, alle Gleichungstypen, einfache Geometrien und strukturierte uniforme Gitter
- **Finite Volumen**
 - Vereinfachung des physikalischen Prinzips, vornehmlich hyperbolische Gleichungen
- **Finite Elemente**
 - Vereinfachung der Funktionenräume, vornehmlich elliptische Gleichungen, komplizierte Geometrien und Differentialoperatoren
- **Lagrangesche Methoden**
 - Vereinfachung der totalen Ableitung, Transportgleichungen
- **Kombinationen** aus den vorherigen Methoden

Betrachte: Elliptisches Modellproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega = [0, 1]^2 \in \mathbb{R}^2 \\ u &= 0 & \text{on } \partial\Omega \end{aligned}$$



Finite Differenzen

Idee:

Diskretisiere den Differenzialoperator

$$-\Delta = L \approx L_h$$

hier: $\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{\Delta x} + O(\Delta x)$, $\Delta x = x_{i+1} - x_i$

Lineares Gleichungssystem:

$$L_h u_h = f_h$$

wobei: $h = \Delta x = \Delta y$

- Δx die Schrittweite zwischen Gitterpunkten
- u_i die Werte aller unbekannten Gitterwerte von u .
- f_i die Werte der Gitterwerte der rechten Seite f ist

Gitter:

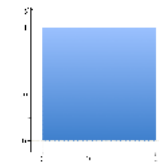
$$x_i = i \cdot \Delta x$$

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i$$

$$y = 0 : Y$$

$$\Delta x = \frac{1}{N_x}$$

y_i analogously



Diskreter Operator:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

$$-\Delta u = \frac{4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

Matrix:

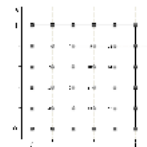


Finite Differenzen Stern:

$$\frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i-1,j} \\ u_{i,j} \\ u_{i+1,j} \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i,j} \\ u_{i,j+1} \end{bmatrix}$$

Nummerierung:

Lexikographische Ordnung



Idee:

Diskretisiere den Differenzialoperator

$$-\Delta = L \approx L_h$$

hier: $\frac{du}{dx} = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x), \quad \Delta x = x_{i+1} - x_i.$

Gitter:

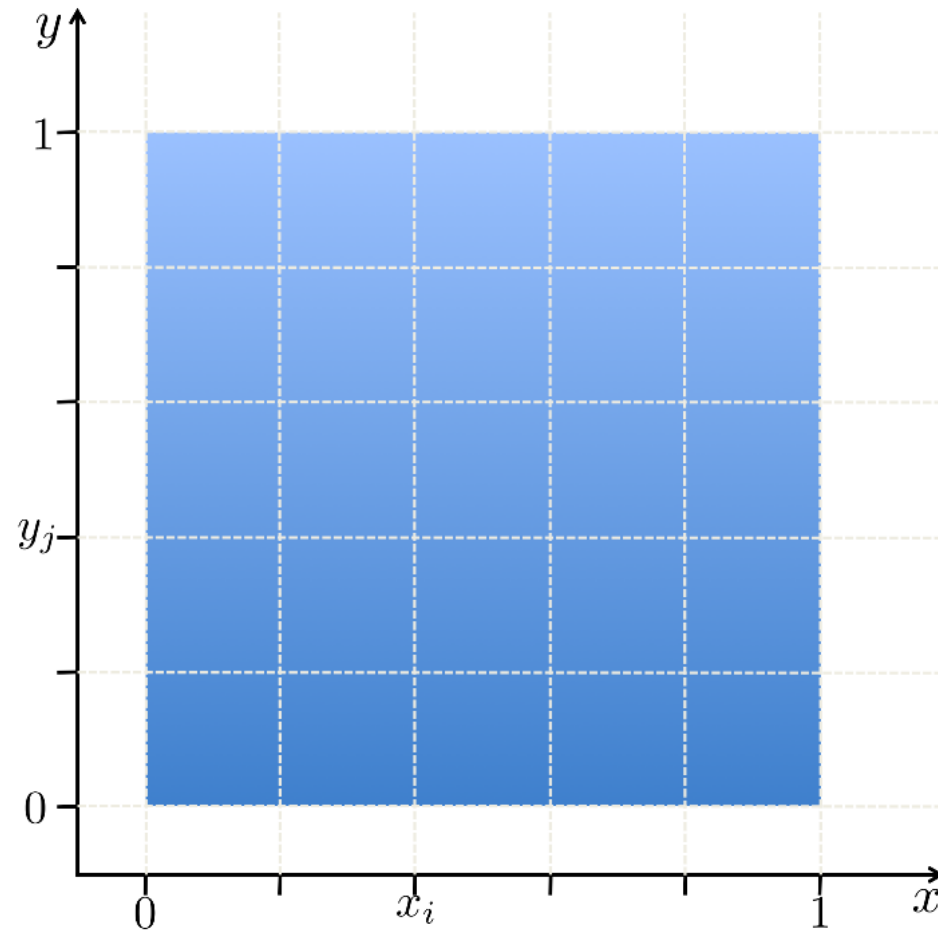
$$x_i = i \cdot \Delta x$$

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i$$

$$i = 0 : N$$

$$N = \frac{1}{\Delta x}$$

y_j analogously



Diskreter Operator:

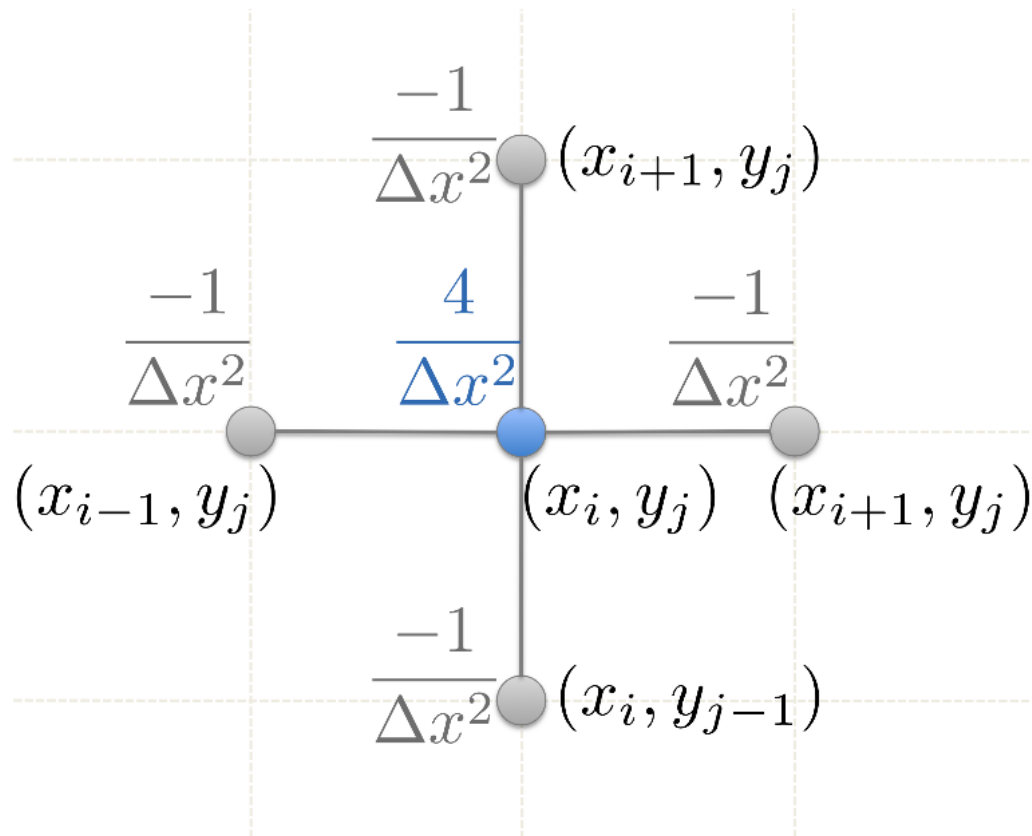
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$



$$-\Delta u = \frac{4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

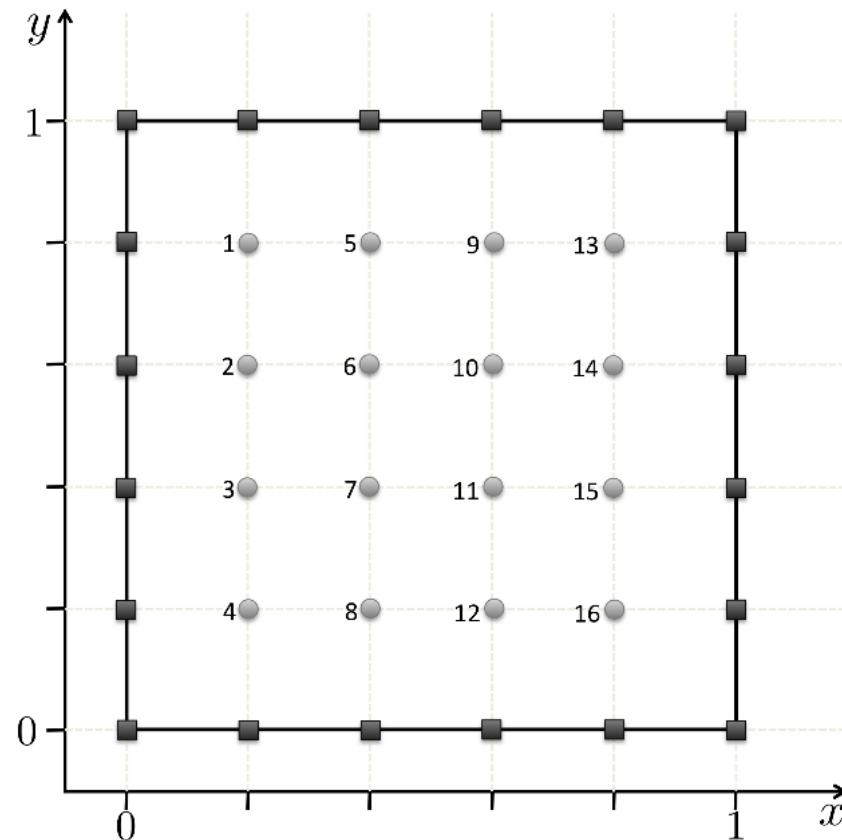
Finite Differenzen Stern:

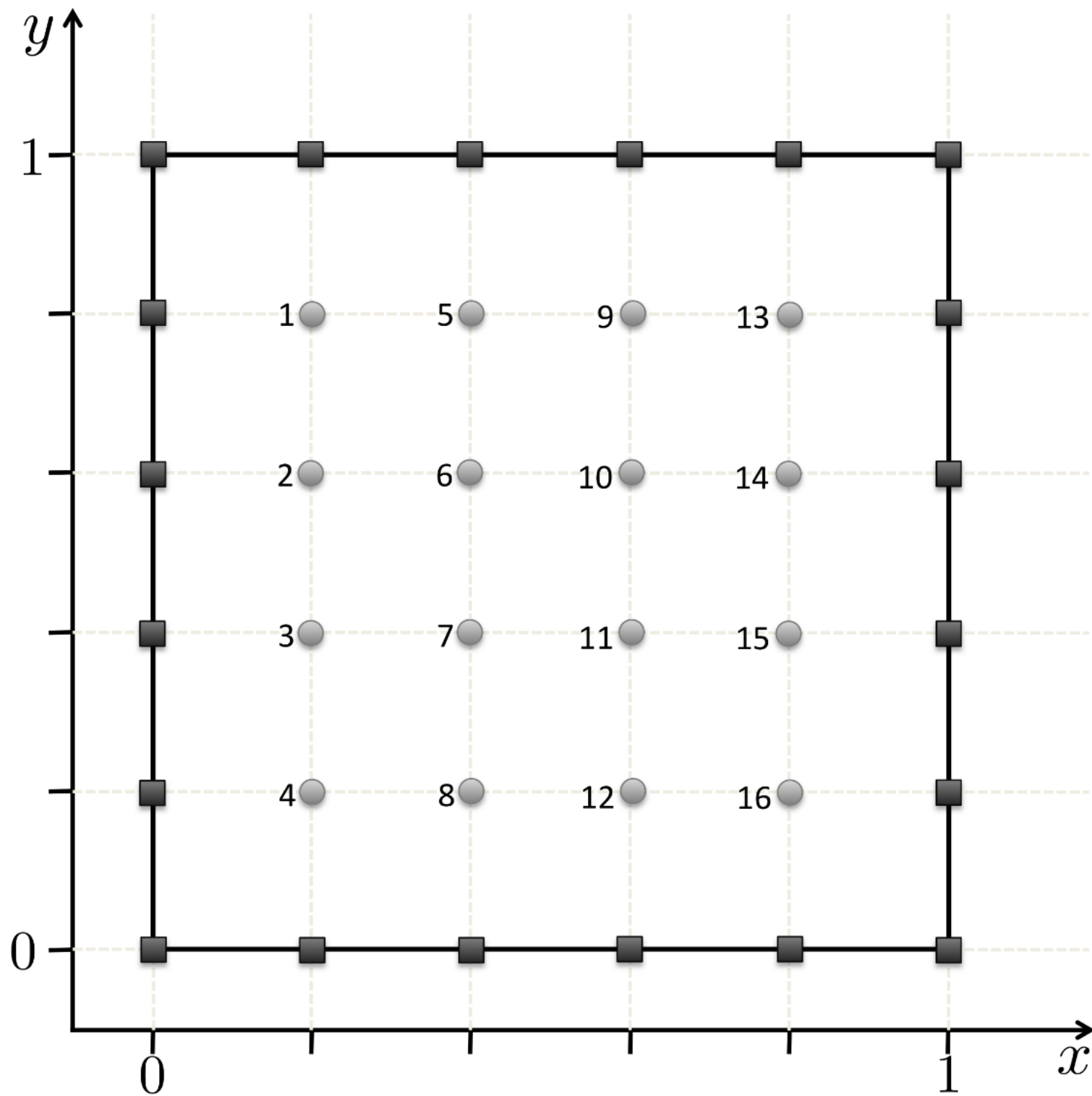


$$\rightarrow \frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Nummerierung:

Lexikographische Ordnung





Matrix:

$$\frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & -1 & & & & & & & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & -1 & & & & & & & & & & \\ & -1 & 4 & -1 & & & -1 & & & & & & & & & \\ & & -1 & 4 & & & & -1 & & & & & & & & \\ -1 & & & & 4 & -1 & & & -1 & & & & & & & \\ & -1 & & & -1 & 4 & -1 & & & -1 & & & & & & \\ & & -1 & & & -1 & 4 & -1 & & & -1 & & & & & \\ & & & -1 & & & -1 & 4 & & & & -1 & & & & \\ & & & & -1 & & & & 4 & -1 & & & -1 & & & \\ & & & & & -1 & & & -1 & 4 & -1 & & & -1 & & \\ & & & & & & -1 & & & -1 & 4 & -1 & & & -1 & \\ & & & & & & & -1 & & & -1 & 4 & -1 & & & \\ & & & & & & & & -1 & & & -1 & 4 & -1 & & \\ & & & & & & & & & -1 & & & -1 & 4 & -1 & \\ & & & & & & & & & & -1 & & & -1 & 4 & \\ & & & & & & & & & & & -1 & & & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Lineares Gleichungssystem:

$$L_h u_h = f_h$$

wobei mit $-\Delta u = f$

- L_h die Matrix der letzten Folie,
- u_h der Vektor aller unbekannten Gitterwerte von u ,
- f_h der Vektor der Gitterwerte der rechten Seite f ist.

Finite Volumen

Idee:

Diskretisiere die Flussform



Lineares Gleichungssystem:

$$L_h u_h = f_h$$

mit

u_h ist die Lösung (Vektor)

f_h ist die rechte Seite (Vektor)

L_h ist die Matrix (Vektor)

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \sum_{k=1}^N f_k \Delta x$$

Zellen:

Überdecke Ω durch Zellen (Volumina) $\Delta_1, \dots, \Delta_N$



Vereinfachte Schreibweise:

$$u_k = u_k^n$$

$$f_k = f_k^n$$

$$4u_{k,j} - u_{k,j-1} - u_{k,j+1} - u_{k,j+1} - u_{k,j-1} = \Delta x^2 f_{k,j}$$

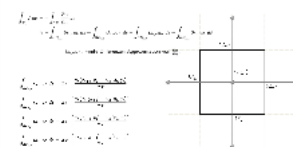
Integration:

$$\int_{E_i} -\Delta u \, dx = \int_{E_i} f \, dx \quad \forall i = 1 : N$$

■ Gauß' theorem

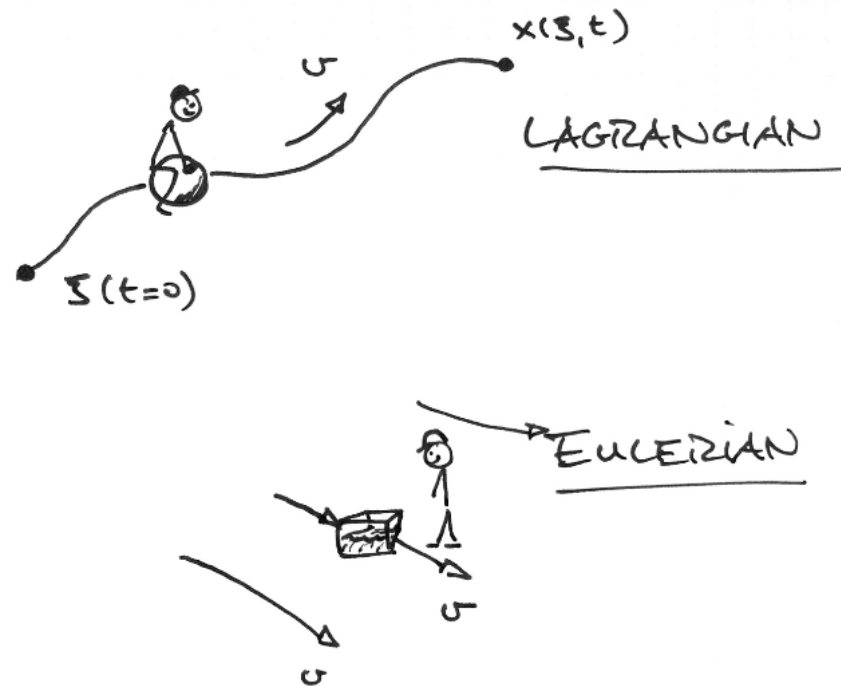
$$-\int_{\partial E_i} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds = \int_{E_i} f \, dx$$

Diskretisierung



Idee:

Diskretisiere die Flussform

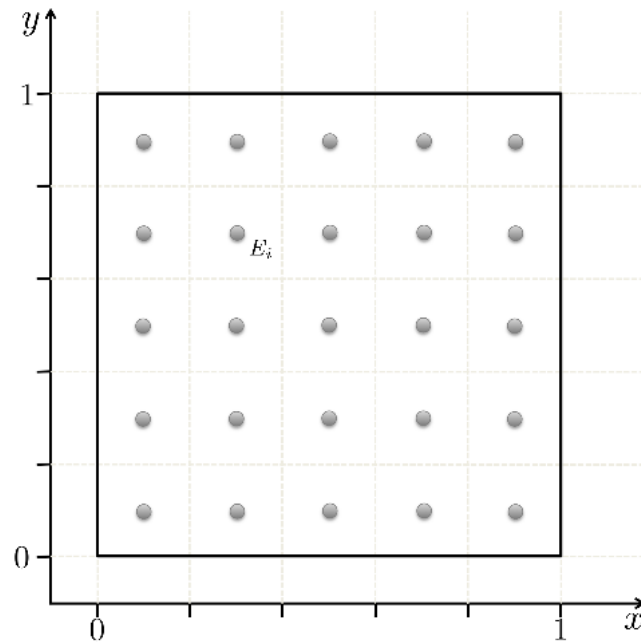


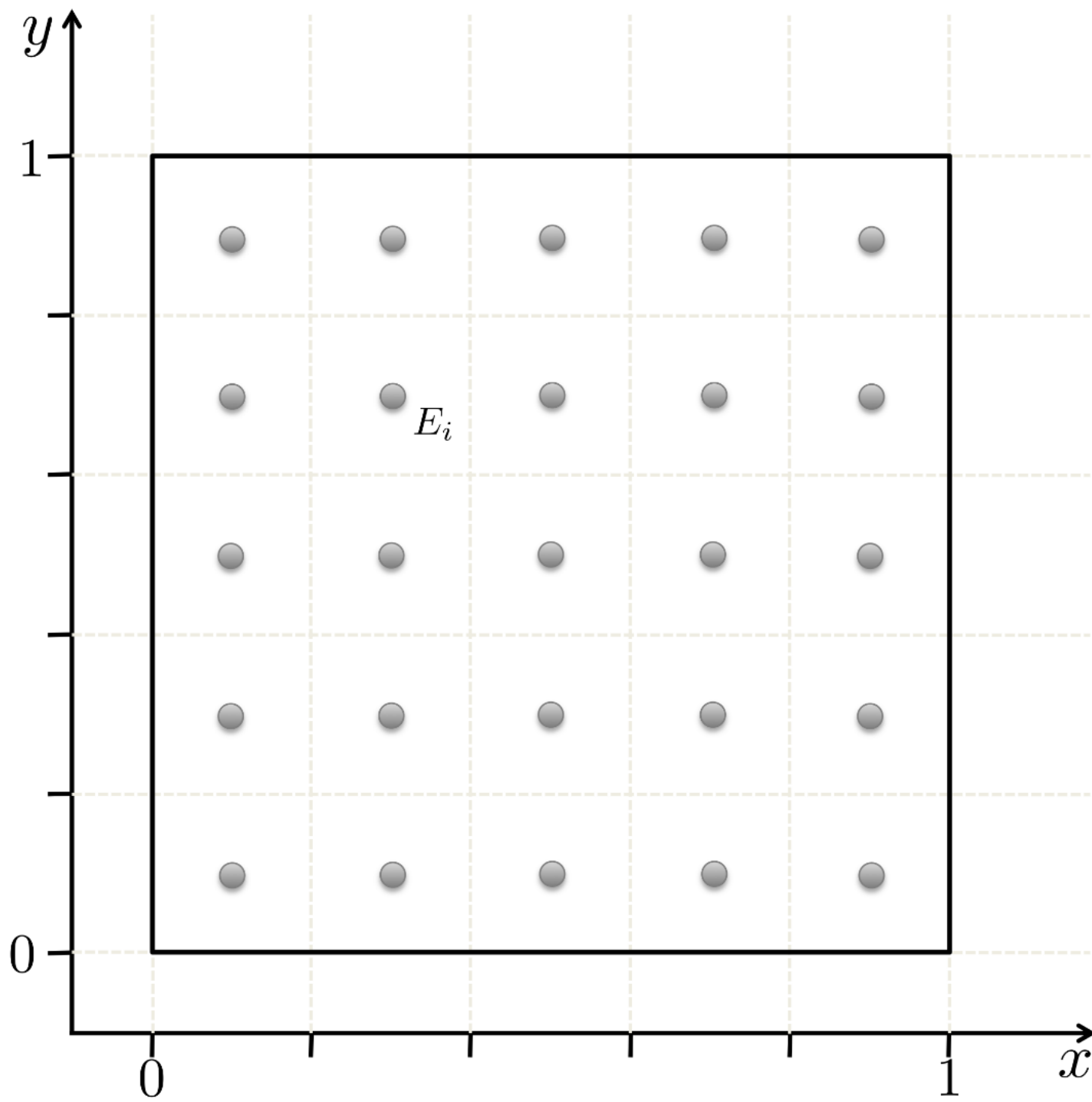
$(t=0)$



Zellen:

Überdecke Ω durch Zellen (Volumina) $E_1, \dots, E_N$:





Integration:

$$\int_{E_i} -\Delta u \, dx = \int_{E_i} f \, dx \quad \forall i = 1 : N$$

|| Gauß' theorem

$$-\int_{\partial E_i} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds = \int_{E_i} f \, dx$$

Diskretisierung

$$\begin{aligned} \int_{E_i} f \, dx &= - \int_{\partial E_i} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds \\ &\approx - \int_{\partial E_{i,1}} \partial_{h,n} u_h \, ds - \int_{\partial E_{i,2}} \partial_{h,n} u_h \, ds - \int_{\partial E_{i,3}} \partial_{h,n} u_h \, ds - \int_{\partial E_{i,4}} \partial_{h,n} u_h \, ds \end{aligned}$$

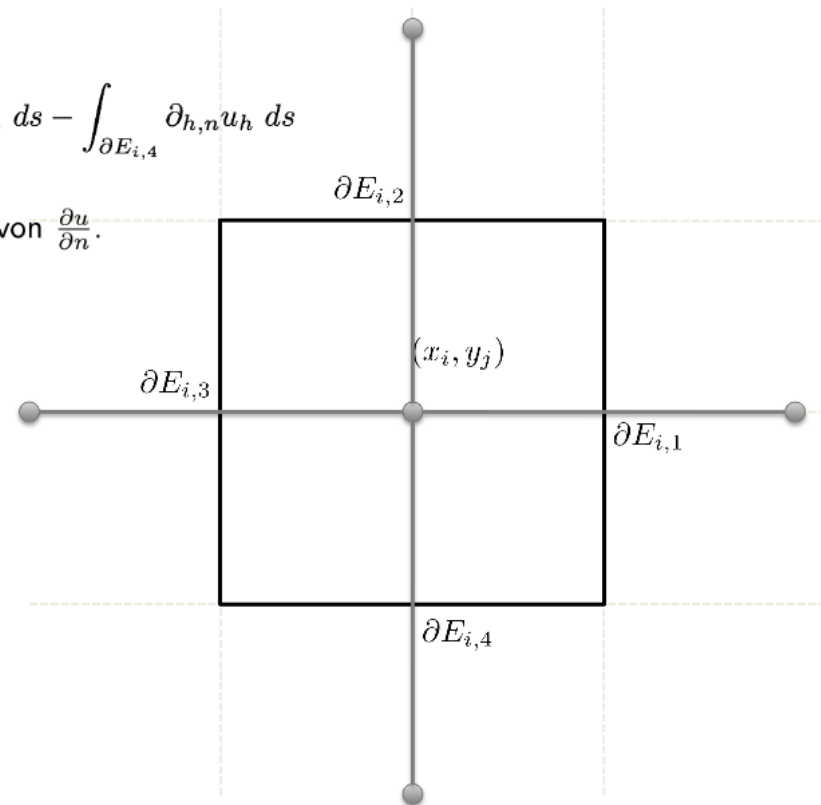
$\partial_{h,n} u_h$: Finite Differenzen Approximation von $\frac{\partial u}{\partial n}$.

$$\int_{\partial E_{i,1}} \partial_{h,n} u_h \, ds = \Delta x \cdot \left[\frac{u_h(x_{i+1}, y_j) - u_h(x_i, y_j)}{\Delta x} \right]$$

$$\int_{\partial E_{i,2}} \partial_{h,n} u_h \, ds = \Delta x \cdot \left[\frac{u_h(x_i, y_{j+1}) - u_h(x_i, y_j)}{\Delta x} \right]$$

$$\int_{\partial E_{i,3}} \partial_{h,n} u_h \, ds = \Delta x \cdot \left[\frac{u_h(x_{i-1}, y_j) - u_h(x_i, y_j)}{\Delta x} \right]$$

$$\int_{\partial E_{i,4}} \partial_{h,n} u_h \, ds = \Delta x \cdot \left[\frac{u_h(x_i, y_{j-1}) - u_h(x_i, y_j)}{\Delta x} \right]$$



$$\begin{aligned} \int_{E_i} f \, dx &= - \int_{\partial E_i} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds \\ &\approx - \int_{\partial E_{i,1}} \partial_{h,n} u_h \, ds - \int_{\partial E_{i,2}} \partial_{h,n} u_h \, ds - \int_{\partial E_{i,3}} \partial_{h,n} u_h \, ds - \int_{\partial E_{i,4}} \partial_{h,n} u_h \, ds \end{aligned}$$

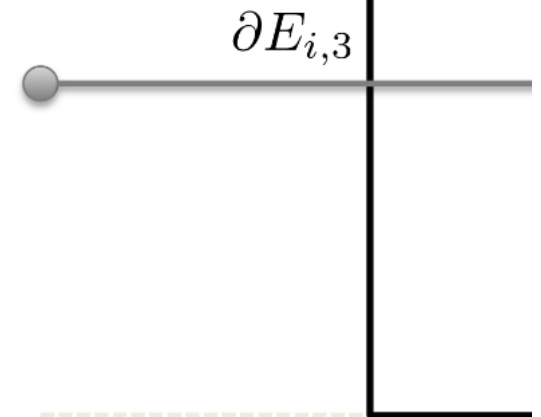
$\partial_{h,n} u_h$: Finite Differenzen Approximation von $\frac{\partial u}{\partial n}$.

$$\int_{\partial E_{i,1}} \partial_{h,n} u_h \, ds = \Delta x \cdot \left[\frac{u_h(x_{i+1}, y_j) - u_h(x_i, y_j)}{\Delta x} \right]$$

$$\int_{\partial E_{i,2}} \partial_{h,n} u_h \, ds = \Delta x \cdot \left[\frac{u_h(x_i, y_{j+1}) - u_h(x_i, y_j)}{\Delta x} \right]$$

$$\int_{\partial E_{i,3}} \partial_{h,n} u_h \, ds = \Delta x \cdot \left[\frac{u_h(x_{i-1}, y_j) - u_h(x_i, y_j)}{\Delta x} \right]$$

$$f \approx \dots \left[u_h(x_i, y_{j-1}) - u_h(x_i, y_j) \right]$$



Vereinfachte Schreibweise:

$$u_{i,j} = u_h(x_i, y_j)$$

$$\bar{f}_{i,j} = \frac{1}{|E_{i,j}|} \int_{E_{i,j}} f \, dx$$

$$4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = \Delta x^2 \bar{f}_{i,j}.$$

Lineares Gleichungssystem:

$$L_h u_h = f_h$$

mit

- L_h die Matrix (rechts),
- u_h der Vektor aller Zellwerte,
- f_h der Vektor mit Zellmittelwerten

$$\int_{E_i} f \, dx \approx \Delta x^2 \cdot \overline{f(x_{E_i})}$$

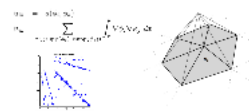
$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & & & & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & & & & & \\ & -1 & 4 & -1 & & & & & & \\ & & -1 & 4 & & & & & & \\ -1 & & & & 4 & -1 & & & & \\ & -1 & & & -1 & 4 & -1 & & & \\ & & -1 & & & -1 & 4 & -1 & & \\ & & & -1 & & & -1 & 4 & & \\ & & & & -1 & & & 4 & -1 & \\ & & & & & -1 & 4 & -1 & & \\ & & & & & & -1 & 4 & -1 & \\ & & & & & & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & & & & & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Finite Elemente

Idee:

"Diskretisiere Funktionen Raum"

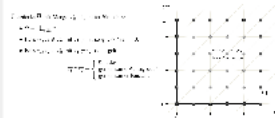
Finites Element



Variations-Problem



Triangulierung



Ersetze die Funktionen(räume)

statt des Problems
finde $u \in V : J(u) = \min_{v \in V} J(v)$
lösen wir das diskrete Problem
finde $u_h \in V_h : J(u_h) = \min_{v_h \in V_h} J(v_h)$

Galerkin Methode

Nun wird das Variations Problem $a(u_h, v_h) = f(v_h)$ ersetzt durch

$$u_h \cdot a(\varphi_i, \varphi_j) = f(\varphi_j), \quad \forall i, j = 1, \dots, N.$$

$$\text{oder } u_h = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i$$

Man erhält wieder: $L_h u_h = f_h$

• L_h ist die Galerkin Matrix
• $f_h = (f(\varphi_1), \dots, f(\varphi_N))^T$ ist die rechte Seite
• L_h ist eine $N \times N$ Matrix

Funktionsraum

- V : Funktionsraum mit $\dim V = \infty$
- V_h : stückweise Polynome, in Ω stetig, dann $V_h = N < \infty$.

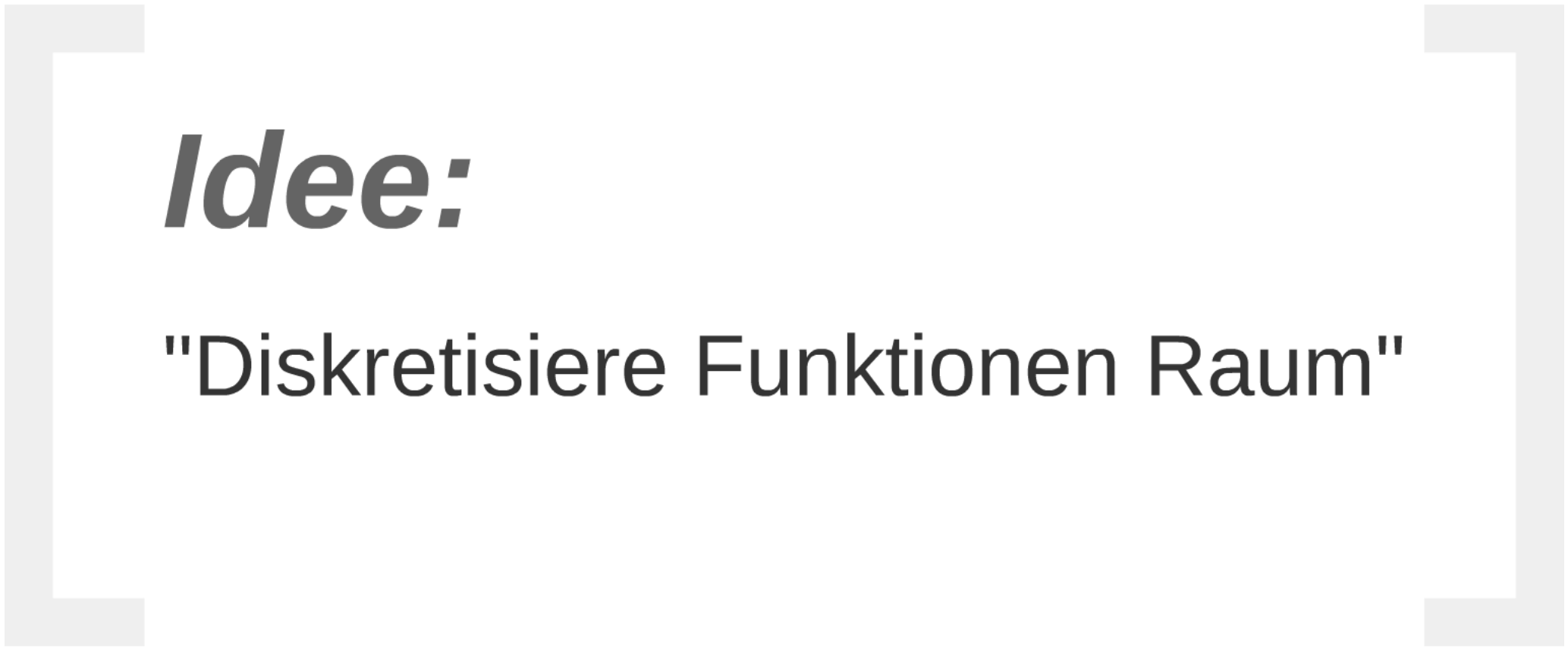
Basisfunktionen Darstellung

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x)$$

$$V_h = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$$

$$u_h \in V_h \iff u_h = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i$$

• φ_i sind Basisfunktionen
• $\varphi_i(x) = 1$ in T_i und 0 sonst



Idee:

"Diskretisiere Funktionen Raum"

Variations-Problem

Klassisches Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \\ \Rightarrow \int_{\Omega} -\Delta u \varphi \, dx &= \int_{\Omega} f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \\ \Rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx &= \int_{\Omega} f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \end{aligned}$$

Variations-Problem

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v$$

mit

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

$$f(v) = \int_{\Omega} f v \, dx$$

Minimierungs-Problem

$$\begin{aligned} \text{finde } u \in V : \quad J(u) &= \min_{v \in V} J(v) \\ \text{mit} \end{aligned}$$

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - f(v)$$

Klassisches Problem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

$$u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$



$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \text{ on } \partial\Omega,$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} -\Delta u \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \quad \forall \varphi$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \quad \forall \varphi$$



Variations-Problem

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v$$

mit

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

$$f(v) = \int_{\Omega} f v \, dx$$

Minimierungs-Problem

finde $u \in V$: $J(u) = \min_{v \in V} J(v)$

mit

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - f(v)$$

Ersetze die Funktionen(räume)

statt des Problems

$$\text{finde } u \in V : \quad J(u) = \min_{v \in V} J(v)$$

lösen wir das diskrete Problem

$$\text{finde } u_h \in V_h : \quad J(u_h) = \min_{v_h \in V_h} J(v_h)$$

Funktionenraum

- V : Funktionenraum mit $\dim V = \infty$;
- V_h : stückweise Polynome, in Ω stetig, $\dim V_h = N < \infty$.

Basisfunktionen Darstellung

$$u_h(x) = \sum_{i=1:N} u_i \varphi_i(x)$$

$$V_h = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$$

$$v_h \in V_h \quad \Rightarrow \quad v_h = \sum_{i=1}^N v_i \varphi_i$$

dabei ist

- $v_i \in \mathbb{R}$ Koeffizienten,
- $\varphi_i \in V_h$: Basis-Polynome.

Galerkin Methode

Nun wird das Variations-Problem $a(u_h, v_h) = f(v_h)$ ersetzt durch

$$u_i \cdot a(\varphi_i, \varphi_j) = f(\varphi_j), \quad \forall i, j = 1, \dots, N,$$

da $u_h = \sum u_i \varphi_i$.

Man erhält wieder: $L_h u_h = f_h$

mit

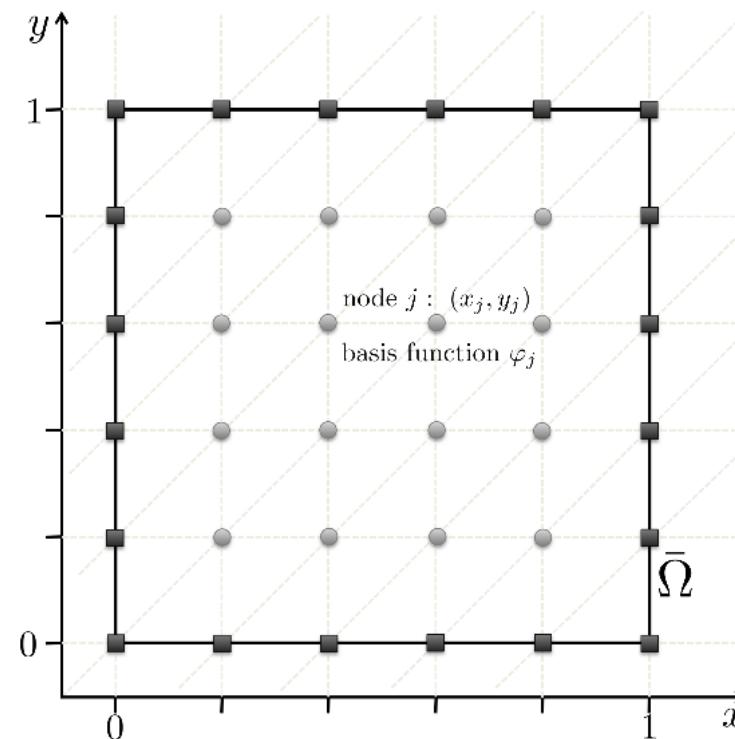
- $(L_h)_{i,j} = a(\varphi_i, \varphi_j)$ Matrix,
- $u_h = (u_1, \dots, u_N)^\top$ der Vektor der Koeffizienten,
- $(f_h)_j = f(\varphi_j)$ Vektor.

Triangulierung

Überdecke $\bar{\Omega}$ mit Menge T_h disjunkter Simplicies:

- $\bar{\Omega} = \bigcup_{\tau \in T_h} \tau$
- Falls $\tau_1, \tau_2 \in T_h$ mit $\tau_1 \neq \tau_2$, so gilt $\tau_1 \cap \tau_2 = \emptyset$.
- Falls $\tau_1, \tau_2 \in T_h$ mit $\tau_1 \neq \tau_2$, dann gelte:

$$\bar{\tau}_1 \cap \bar{\tau}_2 = \begin{cases} \emptyset, \text{ oder} \\ \text{gemeinsame Kante, oder} \\ \text{gemeinsamer Knoten.} \end{cases}$$



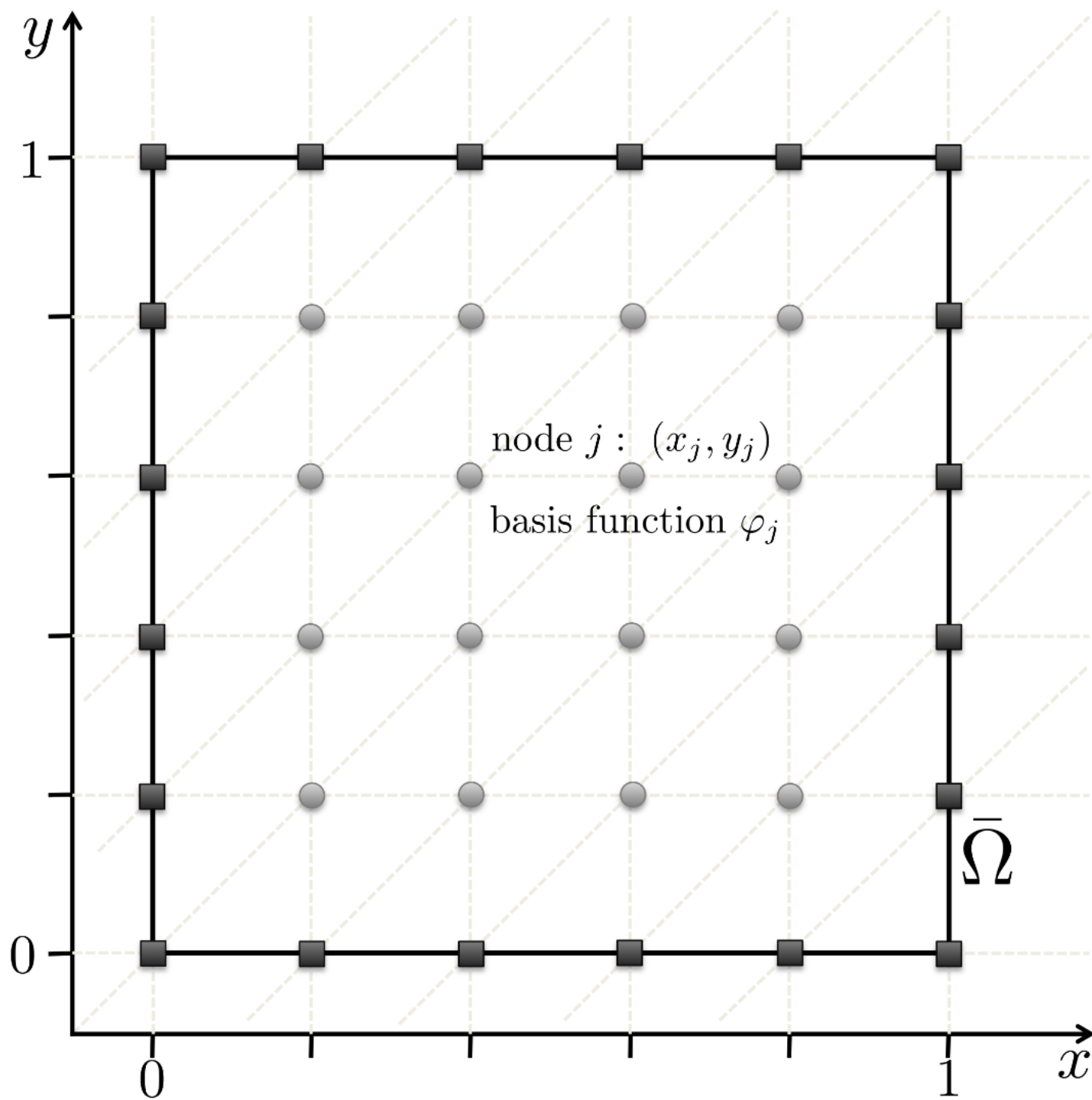
Überdecke $\overline{\Omega}$ mit Menge T_h disjunkter Simplices:

- $\overline{\Omega} = \bigcup_{\tau \in T_h} \tau$
- Falls $\tau_1, \tau_2 \in T_h$ mit $\tau_1 \neq \tau_2$, so gilt $\tau_1 \cap \tau_2 = \emptyset$.
- Falls $\tau_1, \tau_2 \in T_h$ mit $\tau_1 \neq \tau_2$, dann gelte:

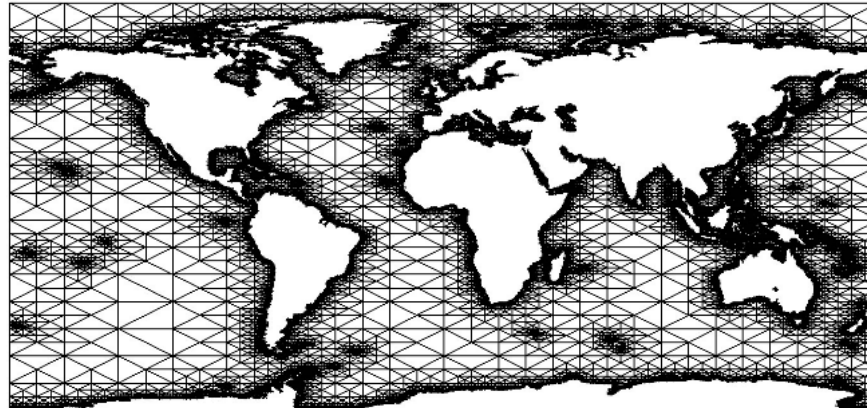
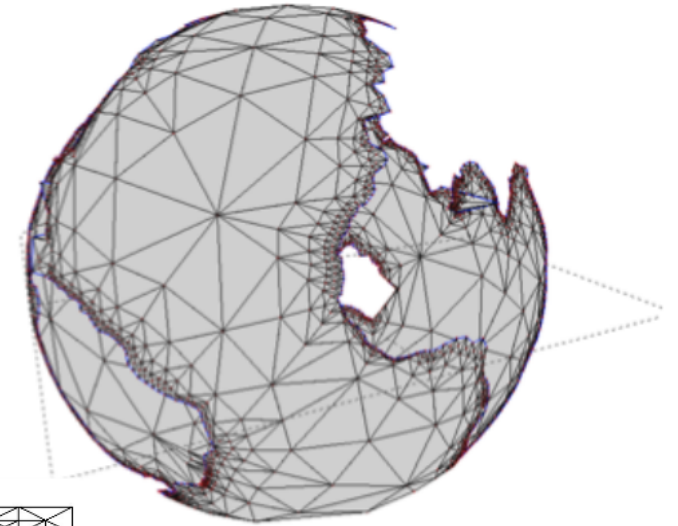
$$\overline{\tau_1} \cap \overline{\tau_2} = \begin{cases} \emptyset, \text{ oder} \\ \text{gemeinsame Kante, oder} \\ \text{gemeinsamer Knoten.} \end{cases}$$

l.

ite, oder
noten.



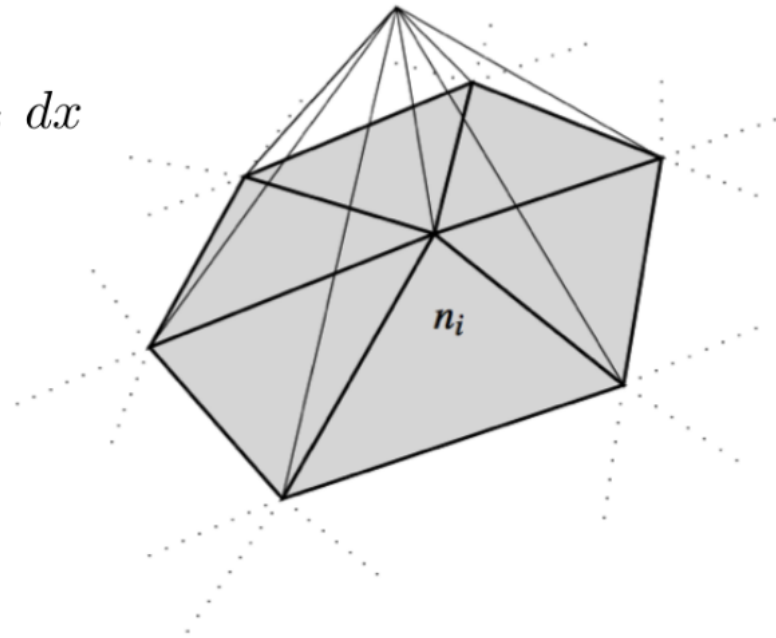
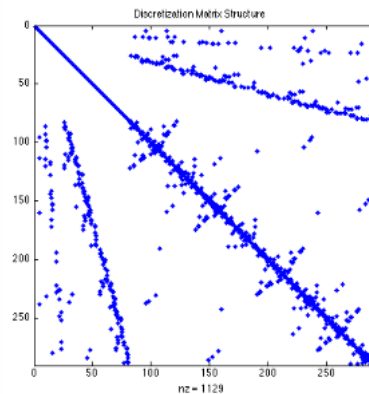
Triangulierungen aus Anwendungen:



Finites Element

$$a_{ik} = a(\phi_i, \phi_k)$$

$$a_{ik} = \sum_{\tau \in (\text{supp}(\phi_i) \cap \text{supp}(\phi_j))} \int_{\tau} \nabla \phi_i \nabla \phi_j \, dx$$



Finite Volumen

Idee:
Diskretisierung des Raumes

Lineares Gleichungssystem:
 $A_{ij}u_j = b_i$

Zellen:
 $\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$

Wendekarte der Randwerte:
 $u|_{\partial\Omega} = g$

Integration:
 $\int_{\Omega} u \, dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} u \, dx$

Diskretisierung:
 $\Omega_h = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i^h$

Differentialgleichungen II

Sommer 2010



Einführung in numerische Methoden

Finite Differenzen

Idee:
Approximation des Differentialquotienten

Gitter:
 $\Omega_h = \{x_i \mid x_i = x_0 + i \Delta x\}$

Lineares Gleichungssystem:
 $A_{ij}u_j = b_i$

Diskreter Operator:
 $\Delta_h u = \frac{u(x_i) - u(x_{i-1}))}{\Delta x}$

Matrix:
 $A_{ij} = \frac{1}{\Delta x} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

Finite Differenzen Stör:
 $b_i = f(x_i)$

Numerisierung:
Lokale Randbedingung

Finite Elemente

Idee:
"Diskretes Funktionsraum"

Einzel-Element:
 $\Omega_i = [x_{i-1}, x_i]$

Variations-Problem:
 $\min_{u \in V} J(u)$

Stückpolynom:
 $u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i(x)$

Minimale der Funktionswerte:
 $\min_{u \in V_h} J(u)$

Globale Methode:
 $\min_{u \in V_h} J(u)$

Funktionsraum:
 $V_h = \{u_h \in C^0(\Omega) \mid u_h|_{\Omega_i} \in P_k\}$

Approximative Darstellung:
 $u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i(x)$

Vorbemerkungen

Die folgenden Aussagen sind allgemeine Aussagen über die Finite-Elemente-Methode (FEM) und sind nicht auf die hier behandelte Variante beschränkt.

Betrachten: Elliptisches Randwertproblem

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^d, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$