DGL II

19.06.2018

J. Behrens

① Spezialfall:

- Betrachte (*) $\begin{cases} -T \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x) & 0 < x < l \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases}$
- Betrachte Spezialfall für f: $f(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ mit vorgegebenen c_n $(n = 1, \dots, N)$
- Für f gilt $f(0) = f(l) = 0$
- Gesucht ist also Lösung der Form
$$u(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$
  $\Rightarrow$ Die homogenen Randbed. sind dann für alle b_n erfüllt.
  $\Rightarrow$ Bestimme b_n so, dass (*) erfüllt ist.

- Einsetzen:
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{T n^2 \pi^2}{l^2} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \sum_{n=1}^{N} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$
$$\Rightarrow \quad b_n = \frac{l^2 c_n}{T n^2 \pi^2} \qquad n = 1, \dots, N$$

Beispiel: Sei $f(x) = \sin(\pi x) - 2\sin(2\pi x) + 5\sin(3\pi x)$
mit $l = T = 1$

$$\Rightarrow \quad u(x) = \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x) - \frac{1}{2\pi^2}\sin(2\pi x) + \frac{5}{9\pi^2}\sin(3\pi x)$$

② Beispiel:

- Betrachte:
$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

- Exakte Lösung (Integration):
$$u'(x) = -\frac{x^2}{2} + a \quad \Rightarrow \quad u(x) = -\frac{x^3}{6} + ax + b$$

- Mit $u(0) = u(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(0) = 0 = b$
$$u(1) = -\frac{1}{6} + a \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow a = \frac{1}{6}$$

erhalte
$$u(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{x}{6} = \frac{1}{6}x(1-x^2)$$

- Fourier-Koeffizienten für $f(x) = x$:
$$c_n = 2\int_0^1 x \sin(n\pi x)\,dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}, \quad n = 1, \dots, N.$$

- Nach Formel gilt dann:
$$u_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{n^2\pi^2}\sin(n\pi x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{2(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3}\sin(n\pi x)$$

- Frage: wie gut ist die approximative Lösung $u_N(x)$?

- Berechne die Fourier-Koeffizienten der exakten Lösung $u(x)$:

$$\tilde{u}_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \sin(n\pi x)$$

wobei

$$a_n = 2\int_0^1 \frac{1}{6}x(1-x^2)\sin(n\pi x)\,dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3}$$

Dies sind gerade die Fourier-Koeffizienten der approx. Lösung!

3 Beispiel:

- Betrachte homogenes ARWP:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0<x<50,\ 0<t\leq T \\ u(x,0) = 5-\frac{1}{5}|x-25| & 0\leq x\leq 50 \\ u(0,t) = u(50,t) = 0 & 0\leq t\leq T \end{cases}$$

- Berechne Fourier Koeff. von $g(x) = 5-\frac{1}{5}|x-25|$

$$b_n = \frac{1}{25}\int_0^{50}\left(5-\frac{1}{5}|x-25|\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{50}\right)dx$$

$$= \frac{40}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

- Da die Wärmeleitungsgleichung homogene Rechte Seite besitzt ist $c_n = 0$; damit gilt

$$a_n(t) = \frac{40}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{2500}\cdot t\right)$$

- Lösung:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{40}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{2500}\cdot t\right)}_{a_n(t)}\sin\left(\frac{n\pi x}{50}\right)$$

• Beobachtungen:

a) Für $T>0$ fest fallen $a_n(t)$ exponentiell schnell ab ($n\to\infty$).
"höhere Werte von n sind höhere Frequenzen der Lösung u"

b) Für n fest fallen $a_n(t)$ exponentiell schnell ab ($t\to\infty$)

Abfall geschieht schneller, je größer n

→ Für t groß reichen wenige Terme für gute Approximation.

(4) Homogene Neumann-Randbedingungen:

◦ Betrachte:

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= f(x,t) && 0<x<l,\ 0<t\leq T\\
u(x,0) &= g(x) && 0\leq x\leq l\\
u(0,t) &= 0 && 0\leq t\leq T\\
u_x(l,t) &= 0 && 0\leq t\leq T
\end{aligned}
$$

• Interpretation: $u(x,t)$ beschreibe orts- und zeitabhängige Temperatur-Verteilung

i) $u(0,t)=0$: das linke Ende des Intervalls $[0,l]$ wird permanent gekühlt (unendliches Eisbad)

ii) $u_x(l,t)=0$: kein Wärmefluss nach rechts (perfekt isoliert)

• Fourier Reihe:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

kann keine Lösung sein, da unabh. von den zeitabh. Koeffizienten stets

$$
\begin{aligned}
u(0,t) &= 0 && \text{ok}\\
u_x(l,t) &\neq 0 && \text{nicht erfüllbar.}
\end{aligned}
$$

- Alternativer Ansatz: $u(x,t) = \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$, dann erfüllt

u: $u(0,t) = 0$ und $u_x(l,t) = 0$

- höhere Frequenzen: hänge "halbe Sinus-Welle" an:

$$\sin\left(\frac{\pi x}{2l} + \frac{k\pi x}{l}\right) \qquad k \in \mathbb{N}$$

$$\rightarrow \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right) \qquad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \quad \text{höheren Frequenzen}$$

- Damit Lösungsansatz:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{2(n-1)\pi x}{2l}\right)$$