

# Differentialgleichungen II

Sommer 2018



Fourier-Methoden

# Einführendes Beispiel in 1D

## Vorbemerkung:

Betrachte das eindimensionale Randwertproblem (**Poisson Gleichung**)

$$\begin{cases} -T \frac{d^2 u}{dx^2} = f(x), & 0 < x < l \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases}$$

Anwendung: Die Gleichung beschreibt die Gleichgewichtslage eines eingespannten hängenden Seils mit Spannung  $T$  und äußerer Kraft  $f(x)$ .

1

**Bemerkung:** (Allgemeine Approximative Lösung der 1D Poisson Gleichung)

- Sei das eindimensionale Randwertproblem gegeben:

$$\begin{cases} -T \frac{d^2 u}{dx^2} = f(x), & 0 < x < l, \\ u(0) = u(l) = 0. \end{cases}$$

- Approximiere die rechte Seite  $f(x)$  durch eine **endliche Fourier Reihe**  $f_N(x)$ :

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^N c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

- Die Fourier-Koeffizienten ergeben sich zu  $(n = 1, \dots, N)$

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$$

- Dann ist eine **approximative Lösung** des Randwertproblems gegeben durch:

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{l^2 c_n}{T n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

2

## Vorbemerkung:

Betrachte das eindimensionale Randwertproblem (**Poisson Gleichung**)

$$\begin{cases} -T \frac{d^2 u}{dx^2} = f(x), & 0 < x < l \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases}$$

**Anwendung:** Die Gleichung beschreibt die Gleichgewichtslage eines eingespannten hängenden Seils mit Spannung  $T$  und äußerer Kraft  $f(x)$ .

**Bemerkung:** (Allgemeine Approximative Lösung der 1D Poisson Gleichung)

- Sei das eindimensionale Randwertproblem gegeben:

$$\begin{cases} -T \frac{d^2 u}{dx^2} = f(x), & 0 < x < l, \\ u(0) = u(l) = 0. \end{cases}$$

- Approximiere die rechte Seite  $f(x)$  durch eine **endliche Fourier-Reihe**  $f_N(x)$ :

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^N c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

- Die Fourier-Koeffizienten ergeben sich zu ( $n = 1, \dots, N$ )

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$$

- Dann ist eine **approximative Lösung** des Randwertproblems gegeben durch:

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{l^2 c_n}{T n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

# Fourier-Methode für die Wärmeleitungsgleichung

**Erinnerung:** (Wärmeleitungsgleichung) Betrachte das Anfangsrandwertproblem der Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t) & : 0 < x < l, 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Gesucht ist eine Lösung in Form einer Fourier-Reihe:

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

**Bemerkung:** Da lediglich  $\sin$  in der Fourier-Reihe verwendet wird, sind die homogenen Randbedingungen automatisch erfüllt.

**Lineares System entkoppelter gewöhnlicher DGLn:**

- Erhalte entkoppeltes lineares System von gewöhnlichen DGLn:

$$\dot{a}_n + k_n a_n = c_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\text{mit } k_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}.$$

- Die Lösungen lassen sich direkt angeben:

$$a_n(t) = b_n \exp(-k_n \cdot t) + \int_0^t \exp(-k_n(t-s)) c_n(s) ds.$$

3

**Lösungsansatz:**

- Für die Koeffizienten der Lösungsdarstellung gilt:

$$a_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l u(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$$

- Die rechte Seite (Inhomogenität)  $f(x, t)$  besitzt die Darstellung

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad \text{mit } c_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$$

- Berechne die Zeit- und Ortsableitungen des Lösungsansatzes für  $u$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial a_n}{\partial t}(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \frac{n\pi}{l} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= - \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \end{aligned}$$

**Koeffizientenvergleich:**

- Ersetze für die linke Seite der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t + u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\partial a_n}{\partial t}(t) + a_n(t) \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

- Koeffizientenvergleich mit der Fourier-Reihe für  $f(x, t)$  ergibt System gewöhnlicher DGLn:

$$\frac{\partial a_n}{\partial t}(t) + a_n(t) \frac{n^2 \pi^2}{l^2} = c_n(t).$$

- Als Anfangswerte gilt  $a_n(0) = c_n(0)$ , ... (wegen  $u(x, 0) = g(x)$ ).

$$a_n(0) = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

$$\Rightarrow a_n(t) = b_n \exp(-k_n \cdot t), \quad n = 1, 2, \dots$$

**Erinnerung:** (Wärmeleitungsgleichung) Betrachte das Anfangsrandwertproblem der Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t) & : 0 < x < l, 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Gesucht ist eine Lösung in Form einer Fourier-Reihe:

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

**Bemerkung:** Da lediglich  $\sin$  in der Fourier-Reihe verwendet wird, sind die homogenen Randbedingungen automatisch erfüllt.

### Lösungsansatz:

- Für die Koeffizienten der Lösungsdarstellung gilt:

$$a_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l u(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$$

- Die rechte Seite (Inhomogenität)  $f(x, t)$  besitzt die Darstellung

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad \text{mit } c_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$$

- Berechne die Zeit- und Ortsableitungen des Lösungsansatzes für  $u$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial a_n}{\partial t}(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \frac{n\pi}{l} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

### Koeffizientenvergleich:

- Erhalte für die linke Seite der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t + u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\partial a_n}{\partial t}(t) + a_n(t) \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \right) \sin \left( \frac{n\pi x}{l} \right).$$

- Koeffizientenvergleich mit der Fourier-Reihe für  $f(x, t)$  ergibt System gewöhnlicher DGLn:

$$\frac{\partial a_n}{\partial t}(t) + a_n(t) \frac{n^2 \pi^2}{l^2} = c_n(t).$$

- Anfangsbedingungen  $a_1(0), a_2(0), \dots$  ergeben sich aus der Anfangsbedingung  $u(x, 0) = g(x)$ :

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \left( \frac{n\pi x}{l} \right), \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \left( \frac{n\pi x}{l} \right) dx \\ \Rightarrow a_n(0) &= b_n, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

## Lineares System entkoppelter gewöhnlicher DGLn:

- Erhalte entkoppeltes lineares System von gewöhnlichen DGLn:

$$\dot{a}_n + k_n a_n = c_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

mit  $k_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$ .

- Die Lösungen lassen sich direkt angeben:

$$a_n(t) = b_n \exp(-k_n \cdot t) + \int_0^t \exp(-k_n \cdot (t - s)) c_n(s) ds.$$

# Fourier-Methode: Eigenschaften, Randbedingungen

## Beobachtung:

- Für  $T > 0$  fest, fallen die  $a_n(t)$  exponentiell schnell ab ( $n \rightarrow \infty$ ).  
Höhere Werte für  $n$  beschreiben die höheren Frequenzen in der Lösung.
- Für  $n$  fest, fallen die  $a_n(t)$  exponentiell schnell ab ( $t \rightarrow \infty$ ).  
Der Aufbau ist umso schneller, je größer  $n$  ist. Für  $t$  groß beschreiben wenige Terme der Fourier-Reihe die exakte Lösung sehr gut.

## Periodische Randbedingungen

Anfangswertproblem auf dem Intervall  $[-l, l]$  gegeben durch

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t) & : -l \leq x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : -l \leq x \leq l \\ u(-l, t) = u(l, t) & : 0 \leq t \leq T \\ u_x(-l, t) = u_x(l, t) & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Periodische Funktionen auf dem Intervall  $[-l, l]$  sind

$$\psi(x) = \frac{1}{2}, \quad \psi(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad \psi(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Ein Lösungsansatz mit Hilfe von Fourier-Reihen ist damit

$$u(x, t) = c_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Fourier-Reihe von } g(x): \\ g(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\ g(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\ \text{Fourier-Reihe von } f(x, t): \\ f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) e^{-n^2 \pi^2 t/l^2} \end{aligned}$$

## Beispiel:

Wir betrachten das inhomogene Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = x & : 0 \leq x < 1, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = 0 & : 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Dann gilt mit den Bezeichnungen von oben

$$b_n = 0$$

$$c_n(t) = c_n = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

und damit

$$a_n(t) = 2 \int_0^1 x e^{-n^2 \pi^2 t} \cos(n\pi x) dx = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n^3 \pi^3} (1 - e^{-n^2 \pi^2 t})$$

## Bisher:

Anfangswertprobleme mit homogenen Randbedingungen, d.h.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t) & : 0 \leq x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

## Frage jetzt:

Was passiert

1) bei (einstufig Neumannschen) Randbedingungen der Form

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0,$$

2) bei periodischen Randbedingungen der Form

$$u(0, t) = u(l, t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t)$$

Wie sehen die entsprechenden Fourier-Methoden aus?



Sind beide Enden **wärmeisoliert**, so haben wir das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t) & : 0 \leq x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u_x(0, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \\ u_x(l, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Jetzt erfüllen die Funktionen

$$u(x, t) = 1, \quad u(x, t) = \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

die vorgegebenen Neumannschen Randbedingungen.

Ein Lösungsansatz lautet damit

$$u(x, t) = b_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

## Beobachtung:

- Für  $T > 0$  fest, fallen die  $a_n(t)$  exponentiell schnell ab ( $n \rightarrow \infty$ ).  
Höhere Werte für  $n$  beschreiben die höheren Frequenzen in der Lösung.
- Für  $n$  fest, fallen die  $a_n(t)$  exponentiell schnell ab ( $t \rightarrow \infty$ ).  
Der Abfall ist umso schneller, je größer  $n$  ist. Für  $t$  groß beschreiben wenige Terme der Fourier-Reihe die exakte Lösung sehr gut.

### Beispiel:

Wir betrachten das inhomogene Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = x & : 0 < x < 1, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = 0 & : 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Dann gilt mit den Bezeichnungen von oben

$$b_n = 0$$

$$c_n(t) = c_n = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

und damit

$$a_n(t) = 2 \int_0^t e^{-n^2\pi^2(t-s)} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} ds = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3} \left(1 - e^{-n^2\pi^2 t}\right)$$

Bisher:

Anfangsrandwertprobleme mit homogenen Randbedingungen, d.h.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t) & : 0 < x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Frage jetzt:

Was passiert

1) bei (einseitig **Neumannschen**) Randbedingungen der Form

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0,$$

2) bei **periodischen** Randbedingungen der Form

$$u(0, t) = u(l, t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t)$$

Wie sehen die entsprechenden Fourier-Methoden aus?

4

ndwertproblem

$T$

Sind beide Enden **wärmeisoliert**, so haben wir das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t) & : 0 < x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u_x(0, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \\ u_x(l, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Jetzt erfüllen die Funktionen

$$u(x, t) = 1, \quad u(x, t) = \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

die vorgegebenen Neumannschen Randbedingungen.

Ein **Lösungsansatz** lautet damit

$$u(x, t) = b_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

## Periodische Randbedingungen

Anfangsrandwertproblem auf dem **Intervall**  $[-l, l]$  gegeben durch

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t) & : -l < x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : -l \leq x \leq l \\ u(-l, t) = u(l, t) & : 0 \leq t \leq T \\ u_x(-l, t) = u_x(l, t) & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Periodische Funktionen auf dem Intervall  $[-l, l]$  sind

$$\psi(x) = \frac{1}{2}, \quad \psi(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad \psi(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Ein **Lösungsansatz** mit Hilfe von Fourier-Reihen ist damit

$$u(x, t) = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right)$$

Mit den Reihenentwicklungen

$$f(x, t) = c_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( c_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + d_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right)$$

$$g(x) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( p_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + q_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right)$$

ergeben sich die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{da_0}{dt}(t) = c_0(t)$$

$$\frac{da_n}{dt}(t) + \frac{n^2\pi^2}{l^2}a_n(t) = c_n(t)$$

$$\frac{db_n}{dt}(t) + \frac{n^2\pi^2}{l^2}b_n(t) = d_n(t)$$

Die zugehörigen Anfangsbedingungen lauten

$$a_0(0) = p_0, \quad a_n(0) = p_n, \quad b_n(0) = q_n$$

# Fourier-Methode für die Wellengleichung

**Idee:** Lösungssuche analog zur Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(x, t) & : 0 < x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u_t(x, 0) = h(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

und suchen eine Lösung in der Form

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Die Fourier-Reihen für  $f(x, t)$ ,  $g(x)$  und  $h(x)$  ergeben DGLs für die Lösungskoeffizienten  $a_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots$

**Beispiel:**

Die Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & : 0 < x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u_t(x, 0) = h(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

ist gegeben durch

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ b_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}t\right) + \frac{d_n l}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{l}t\right) \right\} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Dabei sind  $b_n$  die Fourier-Koeffizienten der Entwicklung der vorgegeben Anfangsbedingung  $u(x, 0) = g(x)$  und  $d_n$  die entsprechenden Koeffizienten von  $u_t(x, 0) = h(x)$ .

## Idee: Lösungssuche analog zur Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(x, t) & : 0 < x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u_t(x, 0) = h(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

und suchen eine Lösung in der Form

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Die Fourier-Reihen für  $f(x, t)$ ,  $g(x)$  und  $h(x)$  ergeben DGL's für die Lösungskoeffizienten  $a_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots$

## Beispiel:

Die Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - u_{xx} = 0 & : 0 < x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u_t(x, 0) = h(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{array} \right.$$

ist gegeben durch

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ b_n \cos \left( \frac{n\pi}{l} t \right) + \frac{d_n l}{n\pi} \sin \left( \frac{n\pi}{l} t \right) \right\} \sin \left( \frac{n\pi x}{l} \right)$$

Dabei sind  $b_n$  die Fourier-Koeffizienten der Entwicklung der vorgegebenen Anfangsbedingung  $u(x, 0) = g(x)$  und  $d_n$  die entsprechenden Koeffizienten von  $u_t(x, 0) = h(x)$ .

## Einführendes Beispiel in 1D

**Beispiel:** Ein Balken der Länge  $L$  ist an einem Ende fest eingespannt und am anderen Ende frei. Die Temperaturverteilung  $u(x, t)$  im Balken ist durch die Wärmeleitungsgleichung beschrieben:

$$u_t = \kappa u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

mit den Randbedingungen:

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0$$

Die Anfangsbedingung ist:

$$u(x, 0) = f(x)$$

Die Lösung  $u(x, t)$  ist die Temperaturverteilung im Balken zu Zeit  $t$ .

## Fourier-Methode für die Wärmeleitungsgleichung

**Ansatz:** Die Lösung  $u(x, t)$  wird als Produkt aus einer Funktion  $X(x)$  und einer Funktion  $T(t)$  angenommen:

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung führt zu:

$$X(x)T'(t) = \kappa X''(x)T(t)$$

Division durch  $X(x)T(t)$  ergibt:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \kappa \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Die linke Seite ist eine Funktion von  $t$  und die rechte Seite eine Funktion von  $x$ . Da beide Seiten gleich sind, müssen sie beide eine konstante Funktion sein. Sei  $-\lambda$  dieser konstante Wert:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda \kappa, \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

Dies führt zu zwei separaten Differentialgleichungen:

$$T'(t) + \lambda \kappa T(t) = 0, \quad X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

Die allgemeine Lösung für  $T(t)$  ist:

$$T(t) = e^{-\lambda \kappa t}$$

Die allgemeine Lösung für  $X(x)$  hängt von  $\lambda$  ab. Für  $\lambda > 0$  gilt:

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda} x) + B \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

Die Randbedingungen  $X(0) = 0$  und  $X'(L) = 0$  führen zu:

$$A = 0, \quad B \cos(\sqrt{\lambda} L) = 0$$

Für  $B \neq 0$  gilt:

$$\cos(\sqrt{\lambda} L) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} L = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Daher sind die Eigenwerte  $\lambda_n$  gegeben durch:

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2$$

Die zugehörigen Eigenfunktionen  $X_n(x)$  sind:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)$$

Die allgemeine Lösung  $u(x, t)$  ist eine Linearkombination dieser Eigenfunktionen:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) e^{-\lambda_n \kappa t}$$

Die Koeffizienten  $c_n$  werden durch die Anfangsbedingung  $u(x, 0) = f(x)$  bestimmt:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)$$

Die Koeffizienten  $c_n$  sind gegeben durch:

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) dx$$

## Differentialgleichungen II



## Fourier-Methode: Eigenschaften, Randbedingungen

**Ansatz:** Die Lösung  $u(x, t)$  wird als Produkt aus einer Funktion  $X(x)$  und einer Funktion  $T(t)$  angenommen:

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung führt zu:

$$X(x)T'(t) = \kappa X''(x)T(t)$$

Division durch  $X(x)T(t)$  ergibt:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \kappa \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Die linke Seite ist eine Funktion von  $t$  und die rechte Seite eine Funktion von  $x$ . Da beide Seiten gleich sind, müssen sie beide eine konstante Funktion sein. Sei  $-\lambda$  dieser konstante Wert:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda \kappa, \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

Dies führt zu zwei separaten Differentialgleichungen:

$$T'(t) + \lambda \kappa T(t) = 0, \quad X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

Die allgemeine Lösung für  $T(t)$  ist:

$$T(t) = e^{-\lambda \kappa t}$$

Die allgemeine Lösung für  $X(x)$  hängt von  $\lambda$  ab. Für  $\lambda > 0$  gilt:

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda} x) + B \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

Die Randbedingungen  $X(0) = 0$  und  $X'(L) = 0$  führen zu:

$$A = 0, \quad B \cos(\sqrt{\lambda} L) = 0$$

Für  $B \neq 0$  gilt:

$$\cos(\sqrt{\lambda} L) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} L = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Daher sind die Eigenwerte  $\lambda_n$  gegeben durch:

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2$$

Die zugehörigen Eigenfunktionen  $X_n(x)$  sind:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)$$

Die allgemeine Lösung  $u(x, t)$  ist eine Linearkombination dieser Eigenfunktionen:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) e^{-\lambda_n \kappa t}$$

Die Koeffizienten  $c_n$  werden durch die Anfangsbedingung  $u(x, 0) = f(x)$  bestimmt:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)$$

Die Koeffizienten  $c_n$  sind gegeben durch:

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) dx$$

## Fourier-Methode für die Wellengleichung

**Ansatz:** Die Lösung  $u(x, t)$  wird als Produkt aus einer Funktion  $X(x)$  und einer Funktion  $T(t)$  angenommen:

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

Einsetzen in die Wellengleichung führt zu:

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t)$$

Division durch  $X(x)T(t)$  ergibt:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Die linke Seite ist eine Funktion von  $t$  und die rechte Seite eine Funktion von  $x$ . Da beide Seiten gleich sind, müssen sie beide eine konstante Funktion sein. Sei  $-\lambda$  dieser konstante Wert:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda c^2, \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

Dies führt zu zwei separaten Differentialgleichungen:

$$T''(t) + \lambda c^2 T(t) = 0, \quad X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

Die allgemeine Lösung für  $T(t)$  hängt von  $\lambda$  ab. Für  $\lambda > 0$  gilt:

$$T(t) = A \cos(\sqrt{\lambda} c t) + B \sin(\sqrt{\lambda} c t)$$

Die allgemeine Lösung für  $X(x)$  hängt von  $\lambda$  ab. Für  $\lambda > 0$  gilt:

$$X(x) = C \cos(\sqrt{\lambda} x) + D \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

Die Randbedingungen  $X(0) = 0$  und  $X'(L) = 0$  führen zu:

$$C = 0, \quad D \cos(\sqrt{\lambda} L) = 0$$

Für  $D \neq 0$  gilt:

$$\cos(\sqrt{\lambda} L) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} L = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Daher sind die Eigenwerte  $\lambda_n$  gegeben durch:

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2$$

Die zugehörigen Eigenfunktionen  $X_n(x)$  sind:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)$$

Die allgemeine Lösung  $u(x, t)$  ist eine Linearkombination dieser Eigenfunktionen:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos(\sqrt{\lambda_n} c t) + B_n \sin(\sqrt{\lambda_n} c t) \right) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)$$

Die Koeffizienten  $A_n$  und  $B_n$  werden durch die Anfangsbedingungen  $u(x, 0) = f(x)$  und  $u_t(x, 0) = g(x)$  bestimmt:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n} c \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)$$

Die Koeffizienten  $A_n$  und  $B_n$  sind gegeben durch:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) dx$$

$$B_n = \frac{2}{L \sqrt{\lambda_n} c} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) dx$$