DGL II

12.06.2018

J. Behrens

① Reflektionsmethode:

- Betrachte ARWP

$$
(*)\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times]0,\infty[\\ u = g,\ u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t=0\} \\ u = 0 & \text{auf } \{x=0\} \times]0,\infty[\\ g(0) = h(0) = 0 & \end{cases}
$$

g, h vorgegeben

- Definiere für $x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$:

$$
\tilde{u}(x,t) := \begin{cases} u(x,t) & \text{für } x \geq 0,\ t \geq 0 \\ -u(-x,t) & \text{für } x \leq 0,\ t \geq 0 \end{cases}
$$

- Analog reflektiere Anfangsdaten:

$$
\tilde{g}(x) := \begin{cases} g(x) & (x \geq 0) \\ -g(-x) & (x \leq 0) \end{cases}, \quad \tilde{h}(x) := \begin{cases} h(x) & (x \geq 0) \\ -h(-x) & (x \leq 0) \end{cases}
$$

- Erhalte AWP:

$$
\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times]0,\infty[\\ \tilde{u} = \tilde{g},\ \tilde{u}_t = \tilde{h} & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t=0\} \end{cases}
$$

- Jetzt kann die Formel von d'Alembert angewendet werden:

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)\,dy$$

- Für $x \geq 0$ ergibt sich nun gerade $u(x,t) = \tilde{u}(x,t)$ als Lösung von ⊛

- Falls $x \geq t \geq 0 \Rightarrow x-t \geq 0$ und damit:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy$$

da für $y \geq 0$ $\tilde{g} = g$ und $\tilde{h} = h$.

- Falls $0 \leq x \leq t$ so gilt $x - t \leq 0$ und daher

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{2}[g(x+t) - g(-x+t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{0} \tilde{h}(y)\,dy + \frac{1}{2}\int_{0}^{x+t} \tilde{h}(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{2}[g(x+t) - g(t-x)] - \frac{1}{2}\int_{0}^{t-x} h(y)\,dy + \frac{1}{2}\int_{0}^{x+t} h(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{2}[g(x+t) - g(t-x)] + \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x} h(y)\,dy$$

② Beweis Euler-Poisson-Darboux Gleichung

- Betrachte ($n \geq 2$):

$$(**)\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times]0,\infty[\\ u = g \;,\; u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

- Es gilt (Erinnerung Poisson-Gleichung)

$$U_r(x;r,t) = \frac{r}{n} ⨍_{B_r(x)} \Delta u(y,t)\, dy$$

- Da u Lösung der Gl. $(**)$ ist, folgt

$$U_r(x;r,t) = \frac{r}{n} ⨍_{B_r(x)} u_{tt}(y,t)\, dy$$

- oder $$r^{n-1} U_r = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{B_r(x)} u_{tt}\, dy$$

- Ableiten nach r:

$$(r^{n-1} U_r)_r = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B_r(x)} u_{tt}\, dS = r^{n-1} ⨍_{\partial B_r(x)} u_{tt}\, dS = r^{n-1} U_{tt}$$

- Insgesamt

$$r^{n-1} U_{rr} + (n-1) r^{n-2} U_r - r^{n-1} U_{tt} = 0$$

$$\Rightarrow U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r} U_r = 0 \qquad \boxtimes$$