Differentialgleichungen II

Sommer 2018

Wärmeleitungsgleichung

Erinnerung
Wärmeleitungsgleichung

Problemstellung: (Wärmeleitungsgleichung)
Gesucht sind explizite Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \Delta_x u.$$

- $t \geq 0$ ist die Zeitvariable
- $\mathbf{x} \in U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, ist die Ortsvariable

Anfangswertproblem: (Cauchy-Problem)
Sei $U = \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t = \Delta_x u & \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times]0, T[\\ u = g & \text{auf} \quad \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Anfangs-Randwertproblem:
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt:

$$\begin{cases} u_t = \Delta_x u & \text{in} \quad U_T := U \times]0, T] \\ u = g & \text{auf} \quad \Gamma_T := \bar{U}_T \setminus U_T \end{cases}$$

Definition: (Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung) Die Funktion

$$\Phi(\mathbf{x}, t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0) \\ 0 & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t < 0) \end{cases}$$

heißt Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung.

Bemerkungen: (Lösung für das Cauchy-Problem)
Mit Hilfe von $\Phi(\mathbf{x}, t)$ lässt sich für das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times]0, \infty[\\ u = g & \text{auf} \quad \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$$

eine Lösungsdarstellung in der Form eines Faltungsintegrals angeben:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4t}} g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Problemstellung: (Wärmeleitungsgleichung)
Gesucht sind explizite Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \Delta_x u.$$

- $t \geq 0$ ist die Zeitvariable
- $\mathbf{x} \in U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, ist die Ortsvariable

Anfangswertproblem: (Cauchy-Problem)
Sei $U = \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t = & \Delta_x u & \text{in} & \mathbb{R}^n \times]0,T] \\ u = & g & \text{auf} & \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

Anfangs-Randwertproblem:
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt:

$$\begin{cases} u_t = & \Delta_x u & \text{in} & U_T := U \times]0,T] \\ u = & g & \text{auf} & \Gamma_T := \overline{U_T} \backslash U_T \end{cases}$$

Definition: (Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung) Die Funktion

$$\Phi(\mathbf{x}, t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0) \\ 0 & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t < 0) \end{cases}$$

heißt Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung.

Bemerkungen: (Lösung für das Cauchy-Problem)
Mit Hilfe von $\Phi(\mathbf{x}, t)$ lässt sich für das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in} & \mathbb{R}^n \times]0, \infty[\\ u = g & \text{auf} & \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$$

eine Lösungsdarstellung in der Form eines Faltungsintegrals angeben:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{4t}} g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Lösungsdarstellungen der Wärmeleitungsgleichung

Das inhomogene Anfangswertproblem mit homogenen Anfangsbedingungen

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

besitzt die Lösung

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x},t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t-s) f(\mathbf{y},s) d\mathbf{y} ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4(t-s)}} f(\mathbf{y},s) d\mathbf{y} ds \end{aligned}$$

Das inhomogene Anfangswertproblem mit inhomogenen Anfangsbedingungen

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f & \text{in } \mathbb{R}^n \times]0,\infty[\\ u(\mathbf{x},0) &= g(\mathbf{x}) & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

besitzt die Lösung

$$u(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t) g(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t-s) f(\mathbf{y},s)\, d\mathbf{y} ds.$$

Duhamel'sches Prinzip:

Die Funktion $u(\mathbf{x},t;s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t-s) f(\mathbf{y},s) d\mathbf{y}$ löst das Problem

$$\begin{cases} u_t(\cdot\,;s) - \Delta u(\cdot\,;s) &= 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (s,\infty) \\ u(\cdot\,;s) &= f(\cdot\,;s) & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = s\} \end{cases}$$

Man erhält dann die Lösung der inhomogenen Gleichung durch Integration über s:

$$u(\mathbf{x},t) = \int_0^t u(\mathbf{x},t;s)\, ds$$

Das inhomogene Anfangswertproblem mit homogenen Anfangsbedingungen

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

besitzt die Lösung

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4(t-s)}} f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds \end{aligned}$$

Duhamel'sches Prinzip:

Die Funktion $u(\mathbf{x}, t; s) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y}$ löst das Problem

$$\begin{cases} u_t(\cdot\,; s) - \Delta u(\cdot\,; s) & = & 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (s, \infty) \\ u(\cdot\,; s) & = & f(\cdot\,; s) & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = s\} \end{cases}$$

Man erhält dann die Lösung der inhomogenen Gleichung durch Integration über s:

$$u(\mathbf{x}, t) = \int\limits_0^t u(\mathbf{x}, t; s)\, ds$$

Das inhomogene Anfangswertproblem mit inhomogenen Anfangsbedingungen

$$\begin{cases} u_t - \Delta u & = f \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \times]0,\infty[\\ u(\mathbf{x},0) & = g(\mathbf{x}) \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

besitzt die Lösung

$$u(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t) g(\mathbf{y})\ d\mathbf{y} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t-s) f(\mathbf{y},s)\ d\mathbf{y} ds.$$

Lösungs-Eigenschaften der Wärmeleitungsgleichung

Vorbemerkungen:

- **Ziel:** Beschreibung von Mittelwertformeln.
- Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $T > 0$ fest. Die Menge

$$U_T := U \times]0, T]$$

heißt parabolischer Zylinder mit dem parabolischen Rand $\Gamma_T := \overline{U_T} \setminus U_T$.

- Für festes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ sei die Menge $E(\mathbf{x}, t; r)$ gegeben durch

$$E(\mathbf{x}, t; r) := \left\{ (\mathbf{y}, s) \in \mathbb{R}^{n+1} : s \leq t, \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \geq \frac{1}{r^n} \right\}$$

- Der Rand von $E(\mathbf{x}, t; r)$ ist gerade eine Höhenlinie der Fundamentallösung $\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s)$. Man nennt $E(\mathbf{x}, t; r)$ auch Wärmekugel (heat ball).

Satz: (Mittelwerteigenschaft der Wärmeleitungsgleichung)
Ist $u \in C_1^2(U_t)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, so gilt

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4r^n} \int_{E(\mathbf{x}, t; r)} \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{(t - s)^2} u(\mathbf{y}, s) \, d\mathbf{y} ds$$

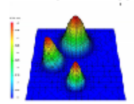
für jede Menge $E(\mathbf{x}, t; r) \subset U_t$.

Bemerkung:
Man kann zeigen, dass für das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^n \times]0, T[\\ u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

unendlich viele Lösungen existieren.
Nur die Nulllösung erfüllt die Wachstumsbedingung,
alle anderen Lösungen wachsen rapide an.

Beispiel
Numerische Lösung der Wärmeleitungsgleichung



Satz: (Lösungen des Cauchy-Problems unter Wachstumsbedingung)
Das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times]0, T[\\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

auf dem beschränkten gesamten $\mathbb{R}^n$ mit stetigen Funktionen f und g besitzt unter der zusätzlichen Wachstumsbedingung

$$u(\mathbf{x}, t)| \leq Ae^{a|\mathbf{x}|^2} \quad (A, a > 0)$$

maximal eine Lösung $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times]0, T[) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$.

Satz: (Maximumprinzipien der Wärmeleitungsgleichung)
Sei $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung in U_T. Dann gilt:

1. Das Maximum von $u(\mathbf{x}, t)$ liegt stets auf dem parabolischen Rand, d.h.

$$\max_{(\mathbf{x}, t) \in \overline{U_T}} u(\mathbf{x}, t) = \max_{(\mathbf{x}, t) \in \Gamma_T} u(\mathbf{x}, t)$$

2. Ist U zusammenhängend und existiert ein Punkt $(\mathbf{x}_0, t_0) \in U_T$ mit

$$u(\mathbf{x}_0, t_0) = \max_{(\mathbf{x}, t) \in \overline{U_T}} u(\mathbf{x}, t),$$

so folgt, dass u auf $\overline{U_T}$ konstant ist.

Satz: (Eindeutigkeit von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung)
Das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } U_t \\ u = g & \text{auf } \Gamma_T \end{cases}$$

auf dem beschränkten Gebiet U_T mit stetigen Funktionen f und g besitzt maximal eine Lösung $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U_T})$.

Beweis:
Sind u und $\tilde{u}$ zwei Lösungen, so lösen die beiden Funktionen

$$w_{1/2} = \pm(u - \tilde{u})$$

die homogene Wärmeleitungsgleichung mit homogenen Randbedingungen.
Nach dem Maximumprinzip gilt dann, dass $w_{1/2}$ identisch verschwinden,
d.h. wir haben $u = \tilde{u}$.

Vorbemerkungen:

- **Ziel:** Beschreibung von Mittelwertformeln.
- Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $T > 0$ fest. Die Menge

$$U_T := U \times]0, T]$$

heißt parabolischer Zylinder mit dem parabolischen Rand $\Gamma_T := \overline{U_T} \backslash U_t$.

- Für festes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ sei die Menge $E(\mathbf{x}, t; r)$ gegeben durch

$$E(\mathbf{x}, t; r) := \left\{ (\mathbf{y}, s) \in \mathbb{R}^{n+1} : s \leq t, \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \geq \frac{1}{r^n} \right\}$$

- Der Rand von $E(\mathbf{x}, t; r)$ ist gerade eine Höhenlinie der Fundamentallösung $\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s)$. Man nennt $E(\mathbf{x}, t; r)$ auch Wärmekugel (heat ball).

Satz: (Mittelwerteigenschaft der Wärmeleitungsgleichung)
Ist $u \in C_1^2(U_t)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, so gilt

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4r^n} \int_{E(\mathbf{x},t;r)} \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{(t-s)^2} u(\mathbf{y}, s)\ d\mathbf{y} ds$$

für jede Menge $E(\mathbf{x}, t; r) \subset U_t$.

Satz: (Maximumprinzipien der Wärmeleitungsgleichung)
Sei $u \in C_1^2(U_t) \cap C(\overline{U_T})$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung in U_T. Dann gilt

1. Das Maximum von $u(\mathbf{x}, t)$ liegt stets auf dem parabolischen Rand, d.h.

$$\max_{(\mathbf{x},t)\in\overline{U_T}} u(\mathbf{x}, t) = \max_{(\mathbf{x},t)\in\Gamma_T} u(\mathbf{x}, t)$$

2. Ist U zusammenhängend und existiert ein Punkt $(\mathbf{x}_0, t_0) \in U_T$ mit

$$u(\mathbf{x}_0, t_0) = \max_{(\mathbf{x},t)\in\overline{U_T}} u(\mathbf{x}, t),$$

   so folgt, dass u auf U_T konstant ist.

leichung)

so folgt, dass u auf

Satz: (Eindeutigkeit von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung)
Das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f \quad \text{in } U_t \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma_T \end{cases}$$

auf dem beschränkten Gebiet U_T mit stetigen Funktionen f und g besitzt maximal eine Lösung $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U_T})$.

Beweis:

Sind u und $\tilde{u}$ zwei Lösungen, so lösen die beiden Funktionen

$$w_{1/2} = \pm(u - \tilde{u})$$

die homogene Wärmeleitungsgleichung mit homogenen Randbedingungen. Nach dem Maximumprinzip gilt dann, dass $w_{1/2}$ identisch verschwinden, d.h. wir haben $u = \tilde{u}$.

deren Lösungen wachsen rapide an.

Satz: (Lösungen des Cauchy-Problems unter Wachstumsbedingung)
Das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times]0,T[\\ u &= g \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

auf dem beschränkten gesamten $\mathbb{R}^n$ mit stetigen Funktionen f und g besitzt unter der zusätzlichen Wachstumsbedingung

$$|u(\mathbf{x},t)| \leq Ae^{a|\mathbf{x}|^2} \quad (A, a > 0)$$

maximal eine Lösung $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times]0,T[) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$.

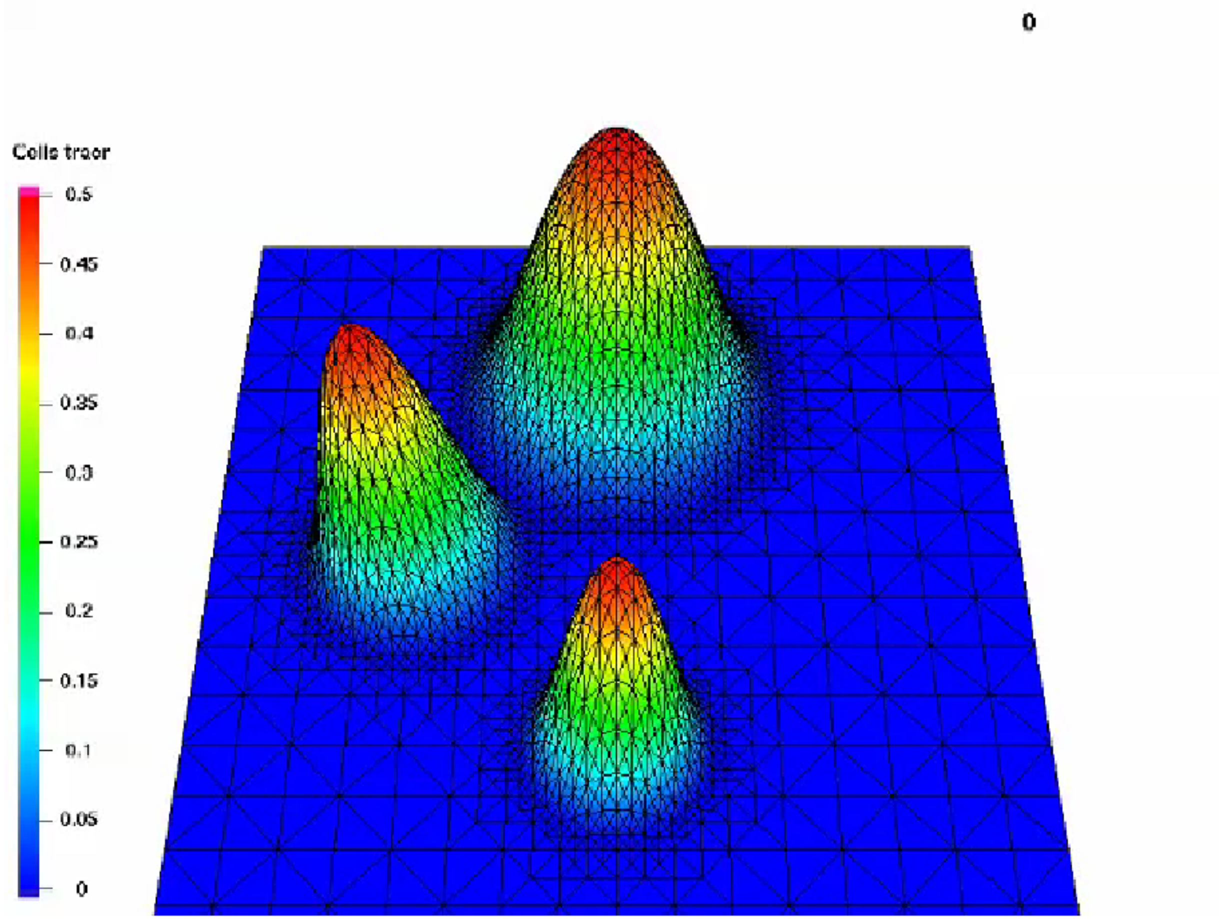
Satz: (Eindeutigkeit v

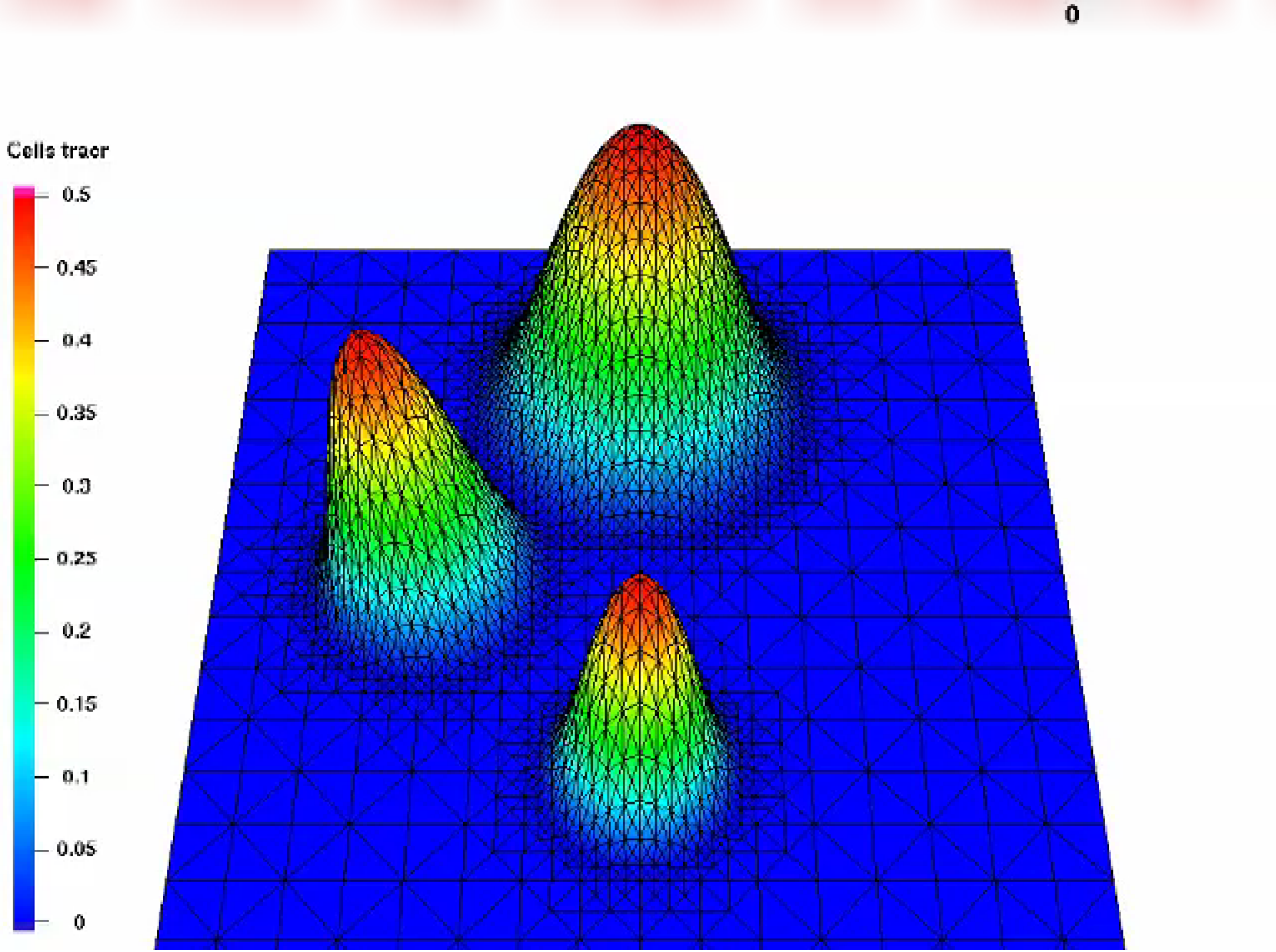
Bemerkung:
Man kann zeigen, dass für das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} u_t &= \Delta u \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times]0,T[\\ u &= 0 \quad\quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

unendlich viele Lösungen existieren.
Nur die Nulllösung erfüllt die Wachstumsbedingung,
alle anderen Lösungen wachsen rapide an.

Beispiel:
Numerische Lösung der Wärmeleitungsgleichung




0
Cells tracr
0.5
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0

Die Wellengleichung

Vorbemerkungen:

- **Ziel:** Untersuchung der Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

- Inhomogene Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = f$$

- Geeignete Anfangs-/Randbedingungen seien gegeben.
- Bezeichne $t > 0$ die Zeitvariable und $\mathbf{x} \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, die Ortsvariable.
- **Gesucht:** Funktion $u : \Omega \times [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $u = u(\mathbf{x}, t)$, wobei der Laplace-Operator auf die Ortsvariable $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ wirkt.
- Für die inhomogene Gleichung sei $f : \Omega \times [0, \infty[\to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion.

Ziel: (Formel von d'Alembert)
Betrachte das eindimensionale Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t t - u_x x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty[, \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

mit g, h gegebene Anfangsbedingungen.
Ziel: Direkte Methode zur Lösung.

1

Satz: (Formel von d'Alembert)
Eine Lösung des eindimensionalen Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_t t - u_x x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty[, \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

mit g, h gegebene Anfangsbedingungen, ist gegeben durch die Formel von d'Alembert:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\, dy.$$

Bemerkung: Damit die so gewonnene Lösung $u(x,t)$ eine *differenzierbare* Lösung der Wellengleichung ist, muss gelten:

$$u \in C^2(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad h \in C^1(\mathbb{R}).$$

2

Vorbemerkungen:

- **Ziel:** Untersuchung der Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

- Inhomogene Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = f$$

- Geeignete Anfangs-/Randbedingungen seien gegeben.
- Bezeichne $t > 0$ die Zeitvariable und $\mathbf{x} \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, die Ortsvariable.
- **Gesucht:** Funktion $u : \overline{\Omega} \times [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $u = u(\mathbf{x}, t)$, wobei der Laplace-Operator auf die Ortsvariable $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ wirkt.
- Für die inhomogene Gleichung sei $f : \Omega \times [0, \infty[\to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion.

Ziel: (Formel von d'Alembert)

Ziel: (Formel von d'Alembert)
Betrachte das eindimensionale Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t t - u_x x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty[, \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

mit g, h gegebene Anfangsbedingungen.
Ziel: Direkte Methode zur Lösung.

1

mit g, h gegebene Anfangsbedingungen.
Ziel: Direkte Methode zur Lösung.

1

Satz: (Formel von d'Alembert)
Eine Lösung des eindimensionalen Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_t t - u_x x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty[, \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

mit g, h gegebene Anfangsbedingungen, ist gegeben durch die Formel von d'Alembert:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y)\ dy.$$

Bemerkung: Damit die so gewonnene Lösung $u(x,t)$ eine *differenzierbare* Lösung der Wellengleichung ist, muss gelten:

$$u \in C^2(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad h \in C^1(\mathbb{R}).$$

2

Lösungsdarstellungen der Wärmeleitungsgleichung

Erinnerung Wärmeleitungsgleichung

Differentialgleichungen II

Lösungs-Eigenschaften der Wärmeleitungsgleichung

Die Wellengleichung