DGL II

05.06.2018

J. Behrens

① Herleitung der Formel von d'Alembert:

- Betrachte
$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times [0,\infty[\\ \left.\begin{aligned} u &= g \\ u_t &= h \end{aligned}\right\} & \text{ auf } \mathbb{R} \times \{t=0\} \end{aligned}$$

- Beobachtung: Es gilt die Faktorisierung
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u = u_{tt} - u_{xx} = 0$$

- Substitution: $v(x,t) := \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t)$

- Erhalte Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten
$$v_t(x,t) + v_x(x,t) = 0$$

- Lösung der Transportgleichung
$$v(x,t) = a(x-t) \quad \text{mit Anfangsbedingung } v(x,0) = a(x).$$

- Wegen $v(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t)$ ist dann u Lösung der inhomogenen Transportgleichung
$$u_t - u_x = a(x-t)$$

- Mit den Lösungsmethoden für Transportgleichungen folgt:

$$u(x,t) = \int_0^t a(x+(t-s)-s)\,ds + u(x+t,0)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} a(y)\,dy + u(x+t,0)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} a(y)\,dy + g(x+t)$$

- Diese Lösung soll weiterhin die Anfangsbedingung $u_t(x,0) = h(x)$ erfüllen:

$$u_t(x,t) = \frac{1}{2}\left[a(x+t) + a(x-t)\right] + g'(x+t)$$

$$\Rightarrow u_t(x,0) = a(x) + g'(x) = h(x)$$

$$\Rightarrow a(x) = h(x) - g'(x)$$

- Damit erhalten wir:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} a(y)dy + g(x+t)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \left[h(y) - g'(y)\right] dy + g(x+t)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy - \frac{1}{2}g(x+t) + \frac{1}{2}g(x-t) + g(x+t)$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left[g(x+t) + g(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy}$$

② <u>Beispiel</u>:

- Betrachte Cauchy-Problem

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times [0,\infty[$$

$$\left.\begin{aligned} u &= \sin x = g \\ u_t &= \cos x = h \end{aligned}\right\} \text{ auf } \mathbb{R} \times \{t=0\}$$

- Formel von d'Alembert:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left[\sin(x+t) + \sin(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \cos(y)\,dy \\ &= \frac{1}{2}\left[\sin(x+t) + \sin(x-t)\right] + \frac{1}{2}\left[s(x+t) - \sin(x-t)\right] \\ &= \sin(x+t) \end{aligned}$$