DGL II

29.05.2018

J. Behrens

① Greensche Funktion im Halbraum $\mathbb{R}^n_+$

- Greensche Funktion allgemein: $G(x,y) = \phi(y-x) - \phi^x(y)$

mit $\phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log \|x\| & n=2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \|x\|^{2-n} & n \geq 3 \end{cases}$

Fundamentallösung der Laplace-Gleichung
$\alpha(n)$ Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$

$\phi^x(y)$ Lösung der "Korrekturgleichung"

$$\Delta \phi^x = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n_+$$
$$\phi^x = \phi(y-x) \quad \text{auf } \{x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$$

- Für $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n_+$ definiere die Reflexion an der Ebene $\partial \mathbb{R}^n_+$:

$$\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$$

- Betrachte $\phi^x(y) := \phi(y - \tilde{x}) = \phi(y_1 - x_1, \dots, y_{n-1} - x_{n-1}, y_n + x_n)$
- $\phi^x(y)$ so definiert ist harmonisch auf dem ganzen Halbraum $\mathbb{R}^n_+$ und auf auf $\partial \mathbb{R}^n_+$ gilt $x, y \in \mathbb{R}^n_+$

$$\phi^x(y) = \phi(y-\tilde{x}) = \phi(y_1 - x_1, \dots, y_{n-1} - x_{n-1}, 0 + x_n)$$

$$= \phi(y_1 - x_1, \dots, y_{n-1} - x_{n-1}, -x_n) \underset{\text{wg Symmetrie von } \phi}{=} \phi(y-x)$$

- Also löst $\phi^x(y) = \phi(y-\tilde{x})$ das Randwertproblem

$$\Delta\phi^x = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n_+$$
$$\phi^x = \phi(y-x) \text{ auf } \partial\mathbb{R}^n_+ \quad \text{löst.}$$

- Greensche Funktion auf $\mathbb{R}^n_+$: $\quad G(x,y) = \phi(y-x) - \phi(y-\tilde{x})$
  $x, y \in \mathbb{R}^n_+, \; y \neq x$

- Es gilt: $\quad \dfrac{\partial G}{\partial y_n}(x,y) = \dfrac{\partial \phi}{\partial y}(y-x) - \dfrac{\partial \phi}{\partial y_n}(y-\tilde{x})$

$$= \frac{1}{n\alpha(n)}\left(\frac{y_n - x_n}{|y-x|^n} - \frac{y_n + x_n}{|y-\tilde{x}|^n}\right)$$

$$\Rightarrow \text{für } y \in \partial\mathbb{R}^n_+ : \quad \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = -\frac{\partial G}{\partial y_n}(x,y) = -\frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{|x-y|^n}$$

② Produktansatz für Wärmeleitungsgleichung:

- Betrachte das 1D Anfangs-Randwertproblem:

$$
\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} && 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T \\
u(x,0) &= u_0(x) && 0 \le x \le \pi \\
u(0,t) &= a(t),\ u(\pi,t) = b(t) && 0 \le t \le T
\end{aligned}
$$

- gesucht: Lösung; Ansatz: Produktansatz:

$$u(x,t) = p(x) \cdot q(t)$$

- Einsetzen:

$$p(x) \cdot \dot{q}(t) = q(t) \cdot p''(x)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{p''(x)}{p(x)} \qquad (p(x) \neq 0,\ q(t) \neq 0)$$

- Folgerung: Da
  - linker Term ist <u>nur</u> abh. von t
  - rechter Term ist <u>nur</u> abh. von x

Gleichheit kann nur gelten, falls

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{p''(x)}{p(x)} = \text{const.} =: -\delta$$

- Erhalte zwei gewöhnliche DGLn:

$$(1) \qquad \dot{q}(t) + \delta q(t) = 0$$

$$(2) \qquad p''(x) + \delta p(x) = 0$$

- Allgemeine Lösung von (1): $\quad q(t) = c_0 e^{-\delta t}$

- Lösung von (2) hängt von δ ab:

  i) Für $\delta = 0$ lautet die allgem. Lsg.: $p(x) = c_1 x + c_2$

  ii) Für $\delta < 0$ — " — : $p(x) = c_1 e^{-\sqrt{\delta}x} + c_2 e^{\sqrt{\delta}x}$

  iii) Für $\delta > 0$ — " — : $p(x) = c_1 \sin(\sqrt{\delta}x) + c_2 \cos(\sqrt{\delta}x)$

- Insgesamt ohne Berücksichtigung der Anfangs-Randbed. erhalten wir Lösungsklassen:

  i) $u(x,t) = c_0 e^{-\delta t}(c_1 x + c_2)$

  ii) $u(x,t) = c_0 e^{-\delta t}\left(c_1 e^{-\sqrt{\delta}x} + c_2 e^{\sqrt{\delta}x}\right)$

  iii) $u(x,t) = c_0 e^{-\delta t}\left(c_1 \sin(\sqrt{\delta}x) + c_2 \cos(\sqrt{\delta}x)\right)$

- Vorgegebene Bedingungen: $u(x,0) = u_0(x)$, $u(0,t) = a(t)$, $u(\pi,t) = b(t)$

  Unbekannte Parameter : c_0, c_1, c_2, δ

Fazit: Die Parameter können i.A. nicht mit Hilfe von u_0, a, b beschrieben werden.

Beispiel:

- Gegeben:

$$u_t = u_{xx} \qquad 0 < x < \pi,\ 0 < t \leq T$$
$$u(x,0) = \sin x \qquad 0 \leq x \leq \pi$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad 0 \leq t \leq T$$

- Wegen $(\sin x)'' = -\sin x \Rightarrow \frac{p''(x)}{p(x)} = -\delta$ mit $\delta = 1 > 0$
  damit kommt die iii) Lösungsklasse in Betracht.

$$u(x,t) = c_0\, e^{-\delta t} \cdot \left(c_1 \sin(\sqrt{\delta}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\delta}\, x)\right)$$

- Mit $u(x,0) = \sin x \Rightarrow c_2 = 0$ und $c_1 = 1$, $c_0 = 1$

- also eine Lösung ist gegeben durch

$$u(x,t) = e^{-t} \sin x .$$

<u>Superpositionsprinzip:</u>

- Jede Lösung der Form $u(x,t) = b_k\, e^{-k^2 t} \sin(kx) \quad k \in \mathbb{Z}$
  erfüllt die homogenen Randbed. $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$

- Überlagerung / Linearkomb. $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, e^{-k^2 t} \sin(kx)$
  ergibt Anfangsbed. $u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$

- Für gegebene Anfangsbedingungen $u_0(x)$ ist die rechte Seite oben eine Fourier-Reihe, d.h.

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

③ Herleitung der Lösungsdarstellung: (zur Vereinfachung $x \in \mathbb{R}$)

- Ist $u(x,t)$ Lösung von $u_t = u_{xx} = \Delta u$ so ist $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ auch Lösung

$\tilde{u}(x,t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$
$\Rightarrow \tilde{u}_t - \Delta \tilde{u} = \lambda^2 u_t - \lambda^2 \Delta u = \lambda^2 \underbrace{(u_t - \Delta u)}_{=0} = 0$

- Ansatz: Suche spezielle Lösungen der Form

$$u(x,t) = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} v\left(\frac{x}{t^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$\frac{(\lambda x)^2}{\lambda^2 t} = \frac{x^2}{t}$
$\Rightarrow$ Suche Lösungen die von $\frac{x}{\sqrt{t}} = \frac{x}{t^{\frac{1}{2}}}$ abhängen

- Damit gilt:

$$u_t(x,t) = -\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} \cdot v - \frac{x}{2} t^{-\frac{3}{2}} t^{-\frac{1}{2}} v'$$

$$u_x(x,t) = t^{-\frac{1}{2}} \cdot t^{-\frac{1}{2}} v'$$

$$u_{xx}(x,t) = t^{-\frac{3}{2}} v''$$

- Es folgt:

$$u_t - u_{xx} = -\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} v - \frac{x}{2} t^{-2} v' - t^{-\frac{3}{2}} v'' = 0$$

- Substituiere $r = \frac{x}{\sqrt{t}}$

$$\underbrace{\frac{1}{2} v + \frac{r}{2} v'}_{\frac{1}{2}(r v)'} + v'' = 0 \qquad \text{Gl. 2. Ordnung}$$

- Umschreiben

$$(v')' + \frac{1}{2}(r v)' = 0$$

$$\Rightarrow v' + \frac{1}{2} r v = \text{const.} = c \in \mathbb{R} \qquad \text{Gl. 1. Ordnung}$$

- Annahmen: $\lim_{r \to \infty} v(r) = \lim_{r \to \infty} v'(r) = 0 \Rightarrow c = 0$
- Dann gilt: $v' = \frac{1}{2} r v \Rightarrow v(r) = b e^{-\frac{r^2}{4}}$
- Damit lautet die explizite Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \leftarrow \text{Fundamentallösung}$$

(verwendet: Einsetzen $\frac{x}{\sqrt{t}}$ und Bestimmung von b, so dass $\int_{\mathbb{R}} \phi(x,t)\,dx = 1$)

$\boxtimes$