DGL II

15.05.2018

J. Behrens

① Lösung der Laplace-Gleichung:

- Beobachtung: Δ-Operator ist invariant gegenüber Rotationen im $\mathbb{R}^n$

- Lösungsansatz: $u(\vec{x}) = v(r)$ mit $r = \|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$

- Differenzieren von r: $\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{r} \quad (\vec{x} \neq 0)$

- Differenzieren von u (für $i = 1, \dots, n$):

$$u_{x_i} = v'(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i} = v'(r)\frac{x_i}{r}$$

$$\Rightarrow u_{x_i x_i} = v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right)$$

- Einsetzen in Δ:

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r)$$

- u harmonisch ($\Delta u = 0$) ergibt die gewöhnliche DGL

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0$$

- Setze $w = v' \neq 0$, so löst w die lineare DGL
$$w' = -\frac{n-1}{r} w$$

- Allgemeine Lösung (DGL I):
$$w(r) = \frac{\alpha}{r^{n-1}} \qquad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R} \text{ konstant.}$$

- Also gilt $v' = \frac{\alpha}{r^{n-1}}$

- Integration: $$v(r) = \begin{cases} -b \log r + c & (n=2) \\ \frac{b}{r^{n-2}} + c & (n \geq 3) \end{cases} \quad b, c \in \mathbb{R} \text{ konst.}$$

② Beweis Mittelwerteigenschaft:

- Definiere für festes $\vec{x} \in U$ die Funktion $\varphi(r)$:
$$\varphi(r) = ⨍_{\partial B(\vec{x}, r)} u(\vec{y}) \, dS(\vec{y}) = ⨍_{\partial B(0,1)} u(x + rz) \, dS(\vec{z})$$

- Dann gilt
$$\varphi'(r) = ⨍_{\partial B(0,1)} Du(\vec{x} + r\vec{z}) \cdot \vec{z} \, dS(\vec{z})$$

- Greensche Formeln:
$$\varphi'(r) = ⨍_{\partial B(\vec{x}, r)} Du(\vec{y}) \frac{\vec{y} - \vec{x}}{r} \, dS(\vec{y})$$
$$= ⨍_{\partial B(\vec{x}, r)} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, dS(\vec{y}) = \frac{r}{n} ⨍_{B(\vec{x}, r)} \Delta u(\vec{y}) \, d\vec{y} = 0$$

- Also ist φ konstant und es gilt:

$$\varphi(r) = \lim_{t\to 0} \varphi(t) = \lim_{t\to 0} ⨍_{\partial B(\vec{x},t)} u(\vec{y})\, dS\vec{y} = u(\vec{x})$$

- Polarkoordinaten-Darstellung:

$$\int_{B(\vec{x},r)} u\, d\vec{y} = \int_0^r \left[\int_{\partial B(\vec{x},s)} u\, dS(y) \right] ds$$

$$= u(x) \int_0^r n\,\alpha(n)\, s^{n-1}\, ds$$

$$= \alpha(n)\, r^n\, u(\vec{x})$$

- Damit erhalten wir die "Mittelwertformel":

$$u(\vec{x}) = \underbrace{\frac{1}{\alpha(n) r^n}}_{vol(B(\vec{x},r))} \int_{B(\vec{x},r)} u\, d\vec{y}$$ ⊠

③ Beweis (Dirichlet-Problem der Poisson-Gleichung):

- Nach Satz existiert die Lösungsdarstellung:

$$u(\vec{x}) = \int_{\partial U} \left[\phi(\vec{y}-\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\vec{y}) - u(\vec{y}) \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}}(\vec{y}-\vec{x}) \right] dS(\vec{y}) - \int_U \phi(\vec{y}-\vec{x}) \Delta u(\vec{y})\, d\vec{y}$$

- Problem: Beim Dirichlet-Problem sind $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ nicht bekannt.

- Greensche Formeln:

$$-\int_U \phi^*(\vec{y}) \Delta u(\vec{y})\, d\vec{y} = \int_{\partial U} u(\vec{y}) \frac{\partial \phi^*}{\partial \vec{n}}(\vec{y}) - \phi^*(\vec{y}) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\vec{y})\, dS(\vec{y})$$

- Daher gilt:

$$\int_{\partial U} \phi^x(\vec{y}) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\vec{y})\, dS(\vec{y}) = \int_U \phi^x(\vec{y})\, \Delta u(\vec{y})\, d\vec{y} + \int_{\partial U} u(\vec{y}) \frac{\partial \phi^x}{\partial \vec{n}}(\vec{y})\, dS(\vec{y})$$

- Randbedingung: $\phi^x(\vec{y}) = \phi(\vec{y}-\vec{x})$ auf ∂U:

$$\int_{\partial U} \phi(\vec{y}-\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\vec{y})\, dS(\vec{y}) = \int_U \phi^x(\vec{y})\Delta u(\vec{y})\, d\vec{y} + \int_{\partial U} u(\vec{y}) \frac{\partial \phi^x}{\partial \vec{n}}(\vec{y})\, dS(\vec{y})$$

- Verwende Satz:

$$u(x) = \int_{\partial U} \underbrace{u(\vec{y})}_{g} \underbrace{\left[\frac{\partial \phi^x(\vec{y})}{\partial \vec{n}} - \frac{\partial \phi(\vec{y}-\vec{x})}{\partial \vec{n}}\right]}_{-\frac{\partial G(\vec{x},\vec{y})}{\partial \vec{n}}} dS(\vec{y}) + \int_U \underbrace{\left[\phi^x(\vec{y}) - \phi(\vec{y}-\vec{x})\right]}_{-G(\vec{x},\vec{y})} \Delta u(\vec{y})\, d\vec{y}$$