DGL II

08.05.2018

J. Behrens

① Beispiel Diagonalform:

- Betrachte zwei unabh. Variable:

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_{12}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right) + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + b_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial x_2} + f(x_1,x_2)u = g(x_1,x_2)$$

- Sei $\tilde{\beta} := S^T \vec{b}$, $\vec{b} = (b_1, b_2)^T$, so lautet die Diagonalform

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_2^2} + \tilde{\beta}_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1} + \tilde{\beta}_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2} + \tilde{f}\tilde{u} = \tilde{g}$$

$x = Sy$, $y = S^T x$, $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2)^T$

- Bem: Die Transformation in Diagonalform ist nicht eindeutig!

Aber: Die beiden Koeffizienten des Hauptterms sind gerade die Eigenwerte der Ausgangsmatrix A.

② Beispiel: Klassifikation der Tricomi-Gleichung:

- Die Tricomi-Gleichung: $K(y)\, u_{xx} - u_{yy} = g(x,y)$
- elliptisch: $K(y) < 0$
- hyperbolisch: $K(y) > 0$
- parabolisch: $K(y) = 0$

③ Beispiel Wellengleichung:

- Motivation: u beschreibt (z.B.) die Auslenkung einer schwingenden Saite!
- Gleichung: "eindimensionale Wellengleichung" (1D im Raum x)

$$(*) \quad u_{tt}(t,x) - c^2 u_{xx}(t,x) = 0 \qquad \text{für } (t,x) \in [0,\infty[\times \mathbb{R}$$

- Anfangsbedingungen: $u(0,x) = f(x)$
  $u_t(0,x) = g(x)$
- c beschreibt die "Ausbreitungsgeschwindigkeit" der Welle
- Ansatz für die Lösungsstruktur:

$$\xi := x + ct \quad , \quad \eta := x - ct$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \quad , \quad t = \frac{1}{2c}(\xi - \eta)$$

- Substituiere: Schreibe $u(t,x)$ in (ξ,η):

$$u(t,x) = u\left(\tfrac{1}{2c}(\xi-\eta),\ \tfrac{1}{2}(\xi+\eta)\right) =: v(\xi,\eta)$$

- v Ableiten: $v_\xi(\xi,\eta) = \frac{1}{2c}u_t + \frac{1}{2}u_x$

$$v_{\xi\eta}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}u_{xx} - \frac{1}{4c}u_{xt} + \frac{1}{4c}u_{tx} - \frac{1}{4c^2}u_{tt}$$

$$= \frac{1}{4}\big(\underbrace{u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt}}_{=0}\big)$$

$= 0$ falls u $(*)$ erfüllt.

- Schreibe: $v(\xi,\eta) = \phi(\xi) + \chi(\eta)$

$$\Rightarrow u(t,x) = v(\xi,\eta) = \phi(\xi) + \chi(\eta) = \phi(x+ct) + \chi(x-ct) \quad (**)$$

- Verwende Anfangswerte:

$$u(0,x) = \phi(x) + \chi(x) = f(x) \quad (1)$$

$$u_t(0,x) = c[\phi'(x) - \chi'(x)] = g(x)$$

$$\Rightarrow \phi(x) - \chi(x) = \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} g(z)\,dz + \frac{1}{c}(\phi(x_0) - \chi(x_0)) \quad x_0 \in \mathbb{R} \quad (2)$$

- Es folgt:

$(2)+(1) \Rightarrow$ $$2\phi(x) = f(x) + \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} g(z)\,dz + \frac{1}{c}(\phi(x_0) - \chi(x_0))$$

$(1)-(2) \Rightarrow$ $$2\chi(x) = f(x) - \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} g(z)\,dz - \frac{1}{c}(\phi(x_0) - \chi(x_0))$$

- Einsetzen in $(**)$ ergibt

$$u(t,x) = \phi(x+ct) + \chi(x-ct) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(z)\,dz\right]$$

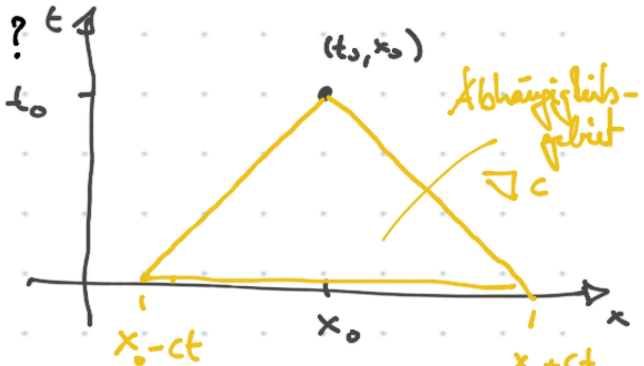
Lösungsdarstellung nach d'Alembert

- Interpretation: Diese Lösungsstruktur liefert Aussagen zum "Bestimmtheits-" und "Abhängigkeitsbereich" der Lösung.

a) Sei (t_0, x_0) gegeben $\to$ bestimme $u(t_0, x_0)$

Frage: Für welche x-Werte müssen f und g bekannt sein?

$\Rightarrow f, g$ müssen auf $[x_0 - ct, x_0 + ct]$ bekannt sein!

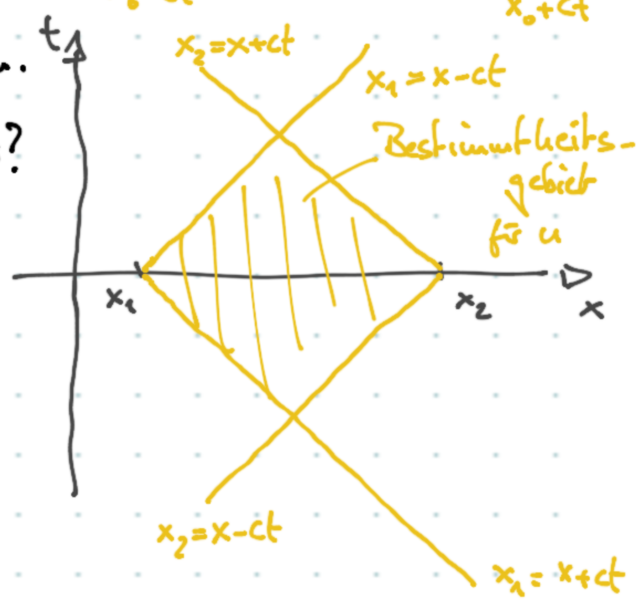


b) Seien f und g auf $[x_1, x_2]$ gegeben.

Frage: Wo ist u dann bestimmbar?

u ist bestimmbar im Parallelogramm

$$x_1 \leq x + ct \leq x_2$$
$$x_1 \leq x - ct \leq x_2$$



- Frage nach der Stabilität: Wie wirken sich "Störungen" in den Daten f und g auf u aus?

Dazu sei u Lösung zu f und g
$\tilde{u}$ Lösung zu $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$

Ziel: $|u - \tilde{u}| \leq$ "$f - \tilde{f}, g - \tilde{g}$"

• <u>Hier:</u> $|u(t,x)-\tilde{u}(t,x)| \leq \frac{1}{2}|f(x+ct)-\tilde{f}(x+ct)| + \frac{1}{2}|f(x-ct)-\tilde{f}(x-ct)|$

$$+ \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} |g(z)-\tilde{g}(z)|\, dz$$

$$\leq \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)-\tilde{f}(x)| + \frac{1}{2c}\max_{x\in\mathbb{R}} |g(x)-\tilde{g}(x)| \underbrace{\int_{x-ct}^{x+ct} dz}_{=2ct}$$

$$\leq \|f-\tilde{f}\|_\infty + t\,\|g-\tilde{g}\|_\infty \qquad t\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \|u-\tilde{u}\|_\infty \leq \|f-\tilde{f}\|_\infty + T\,\|g-\tilde{g}\|_\infty$$

• <u>Also</u> für endliche Zeit $t \leq T$, $T\in\mathbb{R}$ hängt die Lösung u stetig von den Daten f und g ab.