

Differentialgleichungen II

Sommer 2018



Partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung

Definition

Definition: (PDG 2. Ordnung)

Eine **lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung** in n Variablen ist gegeben durch

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + f u = g.$$

Dabei sind die Terme a_{ij} , b_i , f und g Funktionen von $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$.
Den ersten Term der Gleichung nennt man den **Hauptteil** der PDG.

Es gelte oBdA:

$$a_{ij}(\mathbf{x}) = a_{ji}(\mathbf{x}), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Spezialfall: Falls $a_{ij} \equiv \text{const.}$ für $i, j = 1, \dots, n$, so lässt sich die PDG in **Matrixschreibweise** darstellen:

$$(\nabla^\top A \nabla) u + (\mathbf{b}^\top \nabla) u + f u = g,$$

mit $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ symmetrische Matrix und $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$.

Definition: (PDG 2. Ordnung)

Eine **lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung** in n Variablen ist gegeben durch

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + f u = g.$$

Dabei sind die Terme a_{ij} , b_i , f und g Funktionen von $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$.

Den ersten Term der Gleichung nennt man den **Hauptteil** der PDG.

Es gelte oBdA:

$$a_{ij}(\mathbf{x}) = a_{ji}(\mathbf{x}), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Spezialfall: Falls $a_{ij} \equiv \text{const.}$ für $i, j = 1, \dots, n$, so lässt sich die PDG in **Matrixschreibweise** darstellen:

$$(\nabla^\top A \nabla)u + (\mathbf{b}^\top \nabla)u + fu = g,$$

mit $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ symmetrische Matrix und $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$.

Diagonalform

Bemerkungen:

- Gegeben sei die PDG in Matrixschreibweise:

$$(\nabla^T A \nabla)u + (\mathbf{b}^T \nabla)u + fu = g,$$

mit $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ symmetrisch, konstant.

- Lineare Algebra: (Hauptachsentransformation)

Jede reelle, symmetrische Matrix A ist **diagonalisierbar**:

$$D = S^{-1}AS,$$

wobei S orthogonal (d.h. $S^{-1} = S^T$) gewählt werden kann.

Ansatz: (Herleitung von Normalformen)

- Verwende Koordinatentransformation:

$$\mathbf{x} = S\mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} = S^{-1}\mathbf{x}$$

- Setze $\tilde{u}(\mathbf{y}) := u(S\mathbf{y})$.

- Mit $u(\mathbf{x}) = \tilde{u}(S^T \mathbf{x})$ folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n s_{ji} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j}.$$

- Wegen $\frac{\partial u}{\partial x_i} = s_{ij}$ gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n s_{ji} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j}.$$

- Das bedeutet aber gerade

$$\nabla_x u(\mathbf{x}) = S \nabla_y \tilde{u}(S^T \mathbf{x})$$

- Formal: $\nabla_x = S \nabla_y$

- Transponieren: $\nabla_x^T = (S \nabla_y)^T = \nabla_y^T S^T$.

Zusammenfassung: Löst u die Gleichung

$$(\nabla^T A \nabla)u + (\mathbf{b}^T \nabla)u + fu = g,$$

so erhalten wir für $\tilde{u}$ die PDG

$$(\nabla^T S^T A S \nabla)\tilde{u} + (\mathbf{b}^T S \nabla)\tilde{u} + \tilde{f}\tilde{u} = \tilde{g}$$

Definition: (Diagonalform)

Gegeben sei die PDG 2. Ordnung $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ konstant und symmetrisch)

$$(\nabla^T A \nabla)u + (\mathbf{b}^T \nabla)u + fu = g.$$

Dann ist die zugehörige **Diagonalform** der PDG gegeben durch

$$(\nabla^T D \nabla)\tilde{u} + ((S^T \tilde{\mathbf{b}})^T \nabla)\tilde{u} + \tilde{f}\tilde{u} = \tilde{g}$$

mit Diagonalmatrix $D = S^T A S$ und $S^T S = Id$. Dabei ist $\tilde{\mathbf{b}} := \mathbf{b}(S\mathbf{y})$ und $\tilde{f}(\mathbf{y}) := f(S\mathbf{y})$, $\tilde{g}(\mathbf{y}) := g(S\mathbf{y})$.

Tagvital

Bemerkungen:

- Gegeben sei die PDG in Matrixschreibweise:

$$(\nabla^\top A \nabla)u + (\mathbf{b}^\top \nabla)u + fu = g,$$

mit $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ symmetrisch, konstant.

- Lineare Algebra: (Hauptachsentransformation)
Jede reelle, symmetrische Matrix A ist **diagonalisierbar**:

$$D = S^{-1}AS,$$

wobei S orthogonal (d.h. $S^{-1} = S^\top$) gewählt werden kann.

Normalformen)

entransformation:

wobei S orthogonal (d.h. $S^{-1} =$

Ansatz: (Herleitung von Normalformen)

- Verwende Koordinatentransformation:

$$\mathbf{x} = S\mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y} = S^{\top}\mathbf{x}$$

- Setze $\tilde{u}(\mathbf{y}) := u(S\mathbf{y})$.
- Mit $u(\mathbf{x}) = \tilde{u}(S^{\top}\mathbf{x})$ folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}.$$

- Wegen $\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = s_{ij}$ gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n s_{ij} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j}.$$

- Das bedeutet aber gerade

$$\nabla_x u(\mathbf{x}) = S \nabla_y \tilde{u}(S^{\top}\mathbf{x})$$

- Formal: $\nabla_x = S \nabla_y$
- Transponieren: $\nabla_x^{\top} = (S \nabla_y)^{\top} = \nabla_y^{\top} S^{\top}$.

Zusammenfassung: Löst u die Gleichung

$$(\nabla^\top A \nabla)u + (\mathbf{b}^\top \nabla)u + fu = g,$$

so erhalten wir für $\tilde{u}$ die PDG

$$(\nabla^\top S^\top A S \nabla)\tilde{u} + (\mathbf{b}^\top S \nabla)\tilde{u} + \tilde{f}\tilde{u} = \tilde{g}$$

$$= (S \nabla_y)^\top = \nabla_y^\top S^\top.$$

Definition: (Diagonalform)

Gegeben sei die PDG 2. Ordnung ($A = (a_{ij})_{i,j=1\dots,n}$ konstant und symmetrisch)

$$(\nabla^\top A \nabla)u + (\mathbf{b}^\top \nabla)u + fu = g.$$

Dann ist die zugehörige **Diagonalform** der PDG gegeben durch

$$(\nabla^\top D \nabla)\tilde{u} + ((S^\top \tilde{\mathbf{b}})^\top \nabla)\tilde{u} + \tilde{f}\tilde{u} = \tilde{g}$$

mit Diagonalmatrix $D = S^\top A S$ und $S^\top S = Id$. Dabei ist $\tilde{\mathbf{b}} := \mathbf{b}(S\mathbf{y})$ und $\tilde{f}(\mathbf{y}) := f(S\mathbf{y})$, $\tilde{g}(\mathbf{y}) := g(S\mathbf{y})$.

Klassifikation

Definition: (Klassifikation partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung)
Gegeben sei die PDG 2. Ordnung $(A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ konstant und symmetrisch)

$$(\nabla^T A \nabla)u + (\mathbf{b}^T \nabla)u + fu = g.$$

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte der Matrix A .

1. Falls $\lambda_i \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ und haben alle λ_i gleiches Vorzeichen, so heißt die Gleichung **elliptisch**.
2. Falls $\lambda_i \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ und hat ein Eigenwert ein anderes Vorzeichen als die übrigen $n - 1$ Eigenwerte, so heißt die Gleichung **hyperbolisch**.
3. Gilt $\lambda_k = 0$ für mindestens ein $k \in \{1, \dots, n\}$, so heißt die Gleichung **parabolisch**.

Beispiel: Betrachte die PDG 2. Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen:

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_{12} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f(x_1, x_2) \quad (1)$$

$$b_1(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} + f(x_1, x_2)u = g(x_1, x_2). \quad (2)$$

Die Diagonalform ist dann gegeben durch

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} + p_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} + p_2 \frac{\partial u}{\partial y_2} + f u = g.$$

Dann ist die Differentialgleichung

1. **elliptisch**, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$;
2. **hyperbolisch**, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$;
3. **parabolisch**, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$.

Bemerkung (Erweiterung für nicht-konstante Koeffizienten)

Die Typeinteilung lässt sich auf Fälle mit nicht-konstanten Koeffizienten erweitern, was am folgenden Beispiel illustriert wird. Sei

$$y u_{xx} - u_{xy} - u_{yx} + x u_{yy} = 0.$$

Dann ist die Koeffizientenmatrix A gegeben durch

$$A = \begin{bmatrix} y & -1 \\ -1 & x \end{bmatrix}.$$

Die Diskriminante D lautet $D = 1 - xy$. Damit ist die Gleichung

1. **parabolisch** auf der Hyperbel $xy = 1$.
2. **elliptisch** in den beiden konvexen Bereichen $xy > 1$ und
3. **hyperbolisch** im zusammenhängenden Bereich $xy < 1$.

2

Frage: Wofür werden die Gleichungen klassifiziert?

Antwort: Weil jeder Typ ein charakteristisches Lösungsverhalten aufweist!



Definition: (Klassifikation partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung)

Gegeben sei die PDG 2. Ordnung ($A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ konstant und symmetrisch)

$$(\nabla^\top A \nabla)u + (\mathbf{b}^\top \nabla)u + fu = g.$$

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte der Matrix A .

1. Falls $\lambda_i \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ und haben alle λ_i gleiches Vorzeichen, so heißt die Gleichung **elliptisch**.
2. Falls $\lambda_i \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ und hat ein Eigenwert ein anderes Vorzeichen als die übrigen $n - 1$ Eigenwerte, so heißt die Gleichung **hyperbolisch**.
3. Gilt $\lambda_k = 0$ für mindestens ein $k \in \{1, \dots, n\}$, so heißt die Gleichung **parabolisch**.

Beispiel: Betrachte die PDG 2. Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen:

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_{12} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \quad (1)$$

$$b_1(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} + f(x_1, x_2)u = g(x_1, x_2). \quad (2)$$

Die Diagonalform ist dann gegeben durch

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_2^2} + \tilde{p}_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1} + \tilde{p}_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2} + \tilde{f} \tilde{u} = \tilde{g}.$$

Dann ist die Differentialgleichung

1. **elliptisch**, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$;
2. **hyperbolisch**, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$;
3. **parabolisch**, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$.

Bemerkung: (Erweiterung für nicht-konstante Koeffizienten)

Die Typeinteilung lässt sich auf Fälle mit nicht-konstanten Koeffizienten erweitern, was am folgenden Beispiel illustriert wird: Sei

$$yu_{xx} - u_{xy} - u_{yx} + xu_{yy} = 0.$$

Dann ist die Koeffizientenmatrix A gegeben durch

$$A = \begin{bmatrix} y & -1 \\ -1 & x \end{bmatrix}.$$

Die Diskriminante D lautet $D = 1 - xy$. Damit ist die Gleichung

1. **parabolisch** auf der Hyperbel $xy = 1$,
2. **elliptisch** in den beiden konvexen Bereichen $xy > 1$ und
3. **hyperbolisch** im zusammenhängenden Bereich $xy < 1$.

2. **elliptisch** in den beiden konvexen Bereich
3. **hyperbolisch** im zusammenhängenden B

Frage: Wofür werden die Gleichungen klassifiziert?

Antwort: Weil jeder Typ ein charakteristisches Lösungsverhalten aufweist!

Normalformen

Definition: (Normalformen partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung)

1. Die **Normalform einer elliptischen PDG** in n Variablen $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ ist

$$\Delta u + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + f u = g.$$

2. Die **Normalform einer hyperbolischen PDG** in $n+1$ Variablen $(\mathbf{x}, t) = (x_1, \dots, x_n, t)^T$ ist

$$u_{tt} - \Delta u + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + f u = g.$$

3. Die **Normalform einer hyperbolischen PDG** in $n+1$ Variablen $(\mathbf{x}, t) = (x_1, \dots, x_n, t)^T$ ist

$$\Delta u + b_0 u_t + \sum_{i=1}^{n-1} b_i u_{x_i} + f u = g.$$

Bemerkung: in allen Fällen bezeichnet Δ den Laplace-Operator bezüglich $\mathbf{x}$.

Beispiele:

1. Die elliptische **Laplace-Gleichung**

$$\Delta u = 0.$$

2. Die hyperbolische **Wellen-Gleichung**

$$u_{tt} - \Delta u = 0.$$

3. Die parabolische **Wärmeleitungs-Gleichung**

$$u_t = \Delta u.$$

Definition: (Normalformen partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung)

1. Die **Normalform einer elliptischen PDG** in n Variablen $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ ist

$$\Delta u + \sum_{i_1}^n b_i u_{x_i} + fu = g.$$

2. Die **Normalform einer hyperbolischen PDG** in $n+1$ Variablen $(\mathbf{x}, t) = (x_1, \dots, x_n, t)^\top$ ist

$$u_{tt} - \Delta u + \sum_{i_1}^n b_i u_{x_i} + fu = g.$$

3. Die **Normalform einer hyperbolischen PDG** in $n+1$ Variablen $(\mathbf{x}, t) = (x_1, \dots, x_n, t)^\top$ ist

$$\Delta u + b_0 u_t + \sum_{i_1}^{n-1} b_i u_{x_i} + fu = g.$$

Bemerkung: in allen Fällen bezeichnet Δ den Laplace-Operator bezüglich $\mathbf{x}$.

Beispiele:

1. Die elliptische Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0.$$

2. Die hyperbolische Wellen-Gleichung

$$u_{tt} - \Delta u = 0.$$

3. Die parabolische Wärmeleitungs-Gleichung

$$u_t = \Delta u.$$

Wohlgestelltheit

Definition: (Korrekt gestelltes Problem)

Ein **korrekt gestelltes Problem** (auch **wohlgestelltes Problem**) besteht aus

- einer in einem Gebiet definierten *partiellen Differentialgleichung*, und
- einem Satz von *Anfangs- und/oder Randbedingungen*,

so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. **Existenz:** Es existiert wenigstens eine Lösung, die alle Bedingungen erfüllt;
2. **Eindeutigkeit:** Die Lösung ist eindeutig;
3. **Stabilität:** Die Lösung hängt stetig von den Anfangs-/Randbedingungen ab d.h. geringfügige Änderungen in den Daten ergeben geringfügige Änderungen in der Lösung.

3

Beispiel: (Korrekt gestellte Wellengleichung)

Das Anfangswertproblem für die eindimensionale Wellengleichung

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad \text{in } [0, \infty) \times \mathbb{R} \quad (1)$$

$$u = f \quad \text{auf } \{t = 0\} \times \mathbb{R} \quad (2)$$

$$u_t = g \quad \text{auf } \{t = 0\} \times \mathbb{R} \quad (3)$$

ist ein wohlgestelltes hyperbolisches Problem.

- Die eindeutig bestimmte Lösung ist gegeben durch die **Lösungsdarstellung von d'Alembert**:

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \left(f(x - ct) + f(x + ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \right).$$

- Die Lösung hängt stetig von den Daten ab, denn es gilt

$$\|u - \tilde{u}\|_{\infty} \leq \|f - \tilde{f}\|_{\infty} + t \|g - \tilde{g}\|_{\infty}.$$

Beispiel: (Hadamard)

Das Anfangswertproblem für die PDG

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

$$u = f \quad \text{auf } \mathbb{R} \times \{y = 0\} \quad (2)$$

$$u_y = g \quad \text{auf } \mathbb{R} \times \{y = 0\} \quad (3)$$

ist **kein** wohlgestelltes elliptisches Problem!

Beispiel: (Laplace-Gleichung)
Das Randwertproblem für die zweidimensionale Laplace-Gleichung

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{in } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

$$u = g \quad \text{auf } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

ist ein **korrekt gestelltes** elliptisches Problem.

Die Lösung (eindeutig) ist durch die **Poissonsche Integralformel** gegeben:

$$u(x, y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{2\pi} \oint_{\|z\|=1} \frac{g(z)}{\|x - z\|^2} ds$$



Definition: (Korrekt gestelltes Problem)

Ein **korrekt gestelltes Problem** (auch **wohlgestelltes Problem**) besteht aus

- einer in einem Gebiet definierten *partiellen Differentialgleichung*, und
- einem Satz von *Anfangs- und/oder Randbedingungen*,

so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. **Existenz:** Es existiert wenigstens eine Lösung, die alle Bedingungen erfüllt;
2. **Eindeutigkeit:** Die Lösung ist eindeutig;
3. **Stabilität:** Die Lösung hängt stetig von den Anfangs-/Randbedingungen ab
d.h. geringfügige Änderungen in den Daten ergeben geringfügige Änderungen
in der Lösung.

3

Beispiel: (Hadamard)

Beispiel: (Korrekt gestellte Wellengleichung)

Das Anfangswertproblem für die eindimensionale Wellengleichung

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad \text{in } [0, \infty[\times \mathbb{R} \quad (1)$$

$$u = f \quad \text{auf } \{t = 0\} \times \mathbb{R} \quad (2)$$

$$u_t = g \quad \text{auf } \{t = 0\} \times \mathbb{R} \quad (3)$$

ist ein wohlgestelltes hyperbolisches Problem.

- Die eindeutig bestimmte Lösung ist gegeben durch die **Lösungsdarstellung von d'Alembert**:

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \left(f(x - ct) + f(x + ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(z) dz \right).$$

- Die Lösung hängt stetig von den Daten ab, denn es gilt

$$\|u - \tilde{u}\|_{\infty} \leq \|f - \tilde{f}\|_{\infty} + t\|g - \tilde{g}\|_{\infty}.$$



Beispiel: (Hadamard)

Das Anfangswertproblem für die PDG

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

$$u = f \quad \text{auf } \mathbb{R} \times \{y = 0\} \quad (2)$$

$$u_y = g \quad \text{auf } \mathbb{R} \times \{y = 0\} \quad (3)$$

ist **kein** wohlgestelltes elliptisches Problem!

Begründung:

- Setze $f(x) = g(x) = 0$. So ist die eindeutige Lösung gegeben durch

$$u(x, y) = 0.$$

- Andererseits, falls $f_n(x) = 0$ und $g_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$, für $n \in \mathbb{N}$, so ist die Lösung

$$u_n(x, y) = \frac{1}{n^2} \sin(nx) \sinh(ny)$$

- Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g = 0$$

- Aber wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sinh(ny) = \infty$ ($y \neq 0$), erhält man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq u,$$

die Lösung hängt also nicht stetig von den Daten ab!

Begründung:

- Setze $f(x) = g(x) = 0$, So ist die eindeutige Lösung gegeben durch

$$u(x, y) = 0.$$

- Andererseits, falls $f_n(x) = 0$ und $g_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$, für $n \in \mathbb{N}$, so ist die Lösung

$$u_n(x, y) = \frac{1}{n^2} \sin(nx) \sinh(ny)$$

- Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g = 0$$

- Aber wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sinh(ny) = \infty$ ($y \neq 0$), erhält man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq u,$$

die Lösung hängt also nicht stetig von den Daten ab!

Beispiel: (Laplace-Gleichung)

Das Randwertproblem für die zweidimensionale **Laplace-Gleichung**

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 & \text{in } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \\ u &= g & \text{auf } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \end{aligned}$$

ist ein **korrekt gestelltes** elliptisches Problem.

Die Lösung (eindeutig) ist durch die **Poissonsche Integralformel** gegeben:

$$u(x, y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{2\pi} \oint_{\|\mathbf{z}\|=1} \frac{g(\mathbf{z})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2} ds$$

Klassifikation

Definition 1.1 (Klassifikation) Sei M eine Matrix. Dann ist M klassifiziert in eine der folgenden Kategorien:

- 1. **symmetrisch**, falls $M^T = M$
- 2. **hermitesch**, falls $M^H = M$
- 3. **normal**, falls $M^T M = M M^T$
- 4. **orthogonal**, falls $M^T = -M$
- 5. **unitär**, falls $M^H = -M$
- 6. **reell symmetrisch**, falls $M^T = M$ und M reell ist
- 7. **komplex symmetrisch**, falls $M^T = M$
- 8. **hermitesch symmetrisch**, falls $M^H = M$
- 9. **normal hermitesch**, falls $M^H = M$ und M normal ist
- 10. **orthogonal hermitesch**, falls $M^H = M$ und M orthogonal ist
- 11. **unitär hermitesch**, falls $M^H = M$ und M unitär ist
- 12. **reell orthogonal**, falls $M^T = -M$ und M reell ist
- 13. **komplex orthogonal**, falls $M^T = -M$
- 14. **reell unitär**, falls $M^H = -M$ und M reell ist
- 15. **komplex unitär**, falls $M^H = -M$

Beispiel 1.1 Sei $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist M symmetrisch, hermitesch, normal, orthogonal, unitär, reell symmetrisch, komplex symmetrisch, hermitesch symmetrisch, normal hermitesch, orthogonal hermitesch, unitär hermitesch, reell orthogonal, komplex orthogonal, reell unitär und komplex unitär.

Normalformen

Definition 1.2 (Normalform) Sei M eine Matrix. Dann ist M in Normalform, falls es eine Matrix P gibt, so dass $P^{-1} M P$ eine der folgenden Matrizen ist:

- 1. **Diagonalform**, falls $P^{-1} M P = D$, wobei D eine Diagonalmatrix ist.
- 2. **Jordanform**, falls $P^{-1} M P = J$, wobei J eine Jordanmatrix ist.
- 3. **Wohlgestaltform**, falls $P^{-1} M P = W$, wobei W eine Wohlgestaltmatrix ist.

Beispiel 1.2 Sei $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist M in Jordanform, falls $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gewählt wird.

Diagonalform

Definition 1.3 (Diagonalform) Sei M eine Matrix. Dann ist M in Diagonalform, falls es eine Matrix P gibt, so dass $P^{-1} M P = D$, wobei D eine Diagonalmatrix ist.

Beispiel 1.3 Sei $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Dann ist M in Diagonalform, falls $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gewählt wird.

Differentialgleichungen II



Definition

Definition 1.4 (Definition) Sei M eine Matrix. Dann ist M in Definition, falls es eine Matrix P gibt, so dass $P^{-1} M P = D$, wobei D eine Diagonalmatrix ist.

Beispiel 1.4 Sei $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Dann ist M in Definition, falls $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gewählt wird.

Wohlgestalttheit



Definition 1.5 (Wohlgestalttheit) Sei M eine Matrix. Dann ist M in Wohlgestaltform, falls es eine Matrix P gibt, so dass $P^{-1} M P = W$, wobei W eine Wohlgestaltmatrix ist.

Beispiel 1.5 Sei $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist M in Wohlgestaltform, falls $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gewählt wird.