DGL II

27.04.2018

J. Behrens

① **Beweis Verdünnungswelle:**

- Stetigkeit: Kritische Punkte sind $x = f'(u_e)t$
  $x = f'(u_r)t$

- Verdünnungswelle: $u(x,t) = \begin{cases} u_e & : x < f'(u_e)t \\ g\left(\frac{x}{t}\right) & : f'(u_e)t \leq x \leq f'(u_r)t \\ u_r & : x > f'(u_r)t \end{cases}$

- Es gilt: $g\left(\frac{f'(u_e)t}{t}\right) = g(f'(u_e)) = (f')^{-1}(f'(u_e)) = u_e$

  analog: $g\left(\frac{f'(u_r)t}{t}\right) = u_r$

- Lösung der Erhaltungsgleichung

  i) Für $x < f'(u_e)t$ ist $u(x,t)$ konstant, daher löst sie die Erhaltungsgleichung.

  ii) Für $x > f'(u_r)t$ analog.

  iii) Für $f'(u_e)t \leq x \leq f'(u_r)t$ gilt:

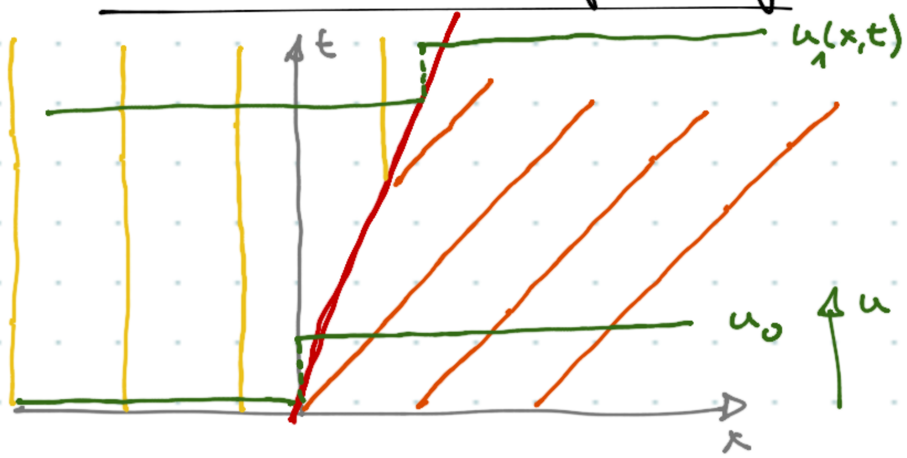
$$u_t = -\frac{x}{t^2}\, g'\left(\frac{x}{t}\right)$$

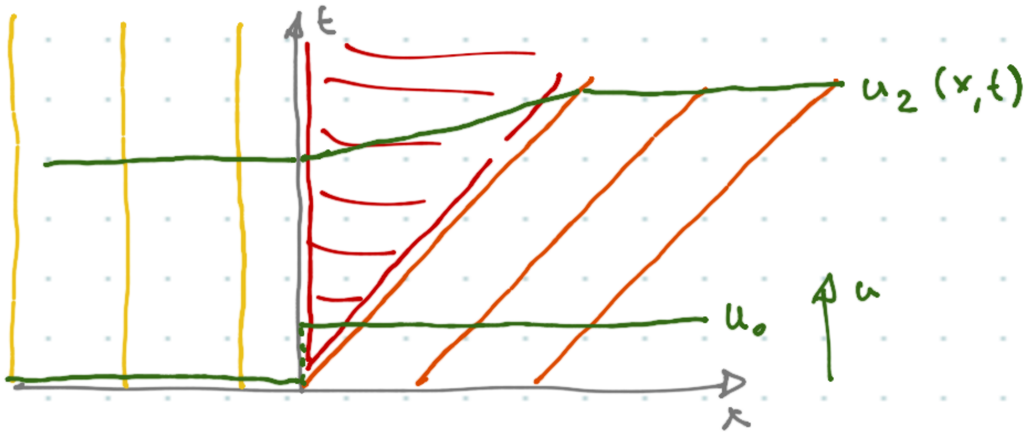
$$f(u)_x = f\left(g\left(\tfrac{x}{t}\right)\right)_x = \underbrace{f'\left(g\left(\tfrac{x}{t}\right)\right)}_{\frac{x}{t}} \frac{g'\left(\frac{x}{t}\right)}{t} = \frac{x}{t^2}\, g'\left(\tfrac{x}{t}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad g\left(\tfrac{x}{t}\right) \text{ löst } u_t + f(u)_x = 0$$

- Fazit: u ist eine stetige Integrallösung.

② Illustration der Integrallösungen



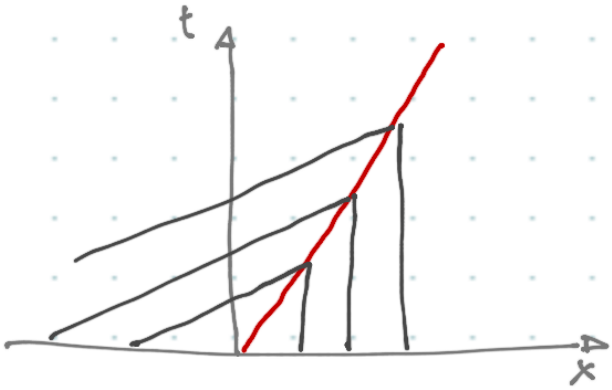


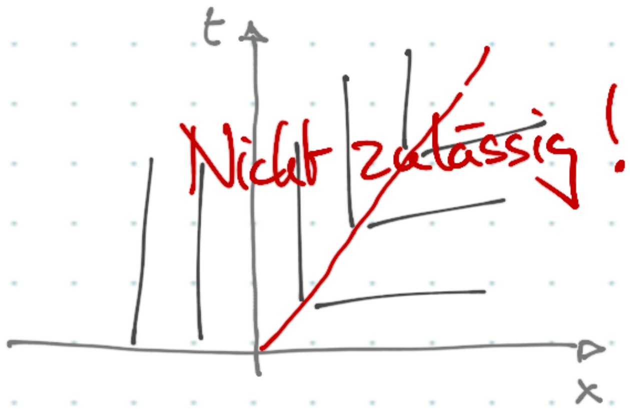
Frage: welche Lösung ist physikalisch richtig? (sinnvoll?)

③ Interpretation der Entropielösung:

$$u(t,x+z) - u(t,x) < \frac{c}{t} z \qquad c>0,\ t>0,\ z>0$$

(*) Unstetigkeit ist zulässig (entropisch), falls die Charakteristiken "hinein laufen"





Insbesondere: $f'(u_\ell) > \dot{s} > f'(u_r)$

Burgers Gleichung: $(f'(u) = u) \to u_\ell > \dot{s} > u_r$

(*) Ansonsten: Verdünnungswelle!