Differentialgleichungen II

Sommer 2018

Integrallösungen und Entropiebedingung

Erinnerung

Beispiel: (Burgers Gleichung)
Die Burgers Gleichung ist gegeben durch die Flussfunktion $f(u) = \frac{u^2}{2}$, bzw. durch das Cauchy-Problem

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 0 && \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[\\ u &= u_0 && \text{auf } \mathbb{R}\times\{t=0\} \end{aligned}$$

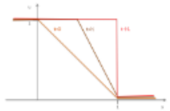
- Die Lösung ist gegeben durch $x(t) = x_0 + tu_0(x_0)$.
- Falls u_0 gegeben ist durch

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \le 0 \\ 1-x & : \quad 0 < x < 1 \\ 0 & : \quad x \ge 1 \end{cases}$$

dann entwickelt $x(t)$ für $t \to 1$ eine Singularität.

- Eine klassische Lösung der Burgers Gleichung existiert nur lokal für $0 \le t < 1$.
- Die lokale Lösung lautet für $t \in [0,1[$:

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & : \quad x < t \\ \frac{(1-x)}{(1-t)} & : \quad 0 \le t \le x < 1 \\ 0 & : \quad x > 1 \end{cases}$$



Definition: (schwache Lösung)
Eine Funktion $u \in L^\infty(\mathbb{R}\times[0,\infty[)$ heißt Integrallösung oder schwache Lösung der Erhaltungsgleichung $u_t + f(u)_x = 0$, falls für alle Testfunktionen v gilt:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (uv_t + f(u)v_x)\, dx dt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)v(x,0)\, dx = 0.$$

Bemerkung:

- Eine Integrallösung muss keine differenzierbare Funktion sein!
- Sie kann sogar Sprungstellen besitzen.

Definition: (Riemannproblem)
Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0 && \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[\\ u &= u_0 && \text{auf } \mathbb{R}\times\{t=0\} \end{aligned}$$

mit unstetigen Anfangsbedingungen

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : \quad x \le 0 \\ u_r & : \quad x > 0 \end{cases}$$

heißt Riemannproblem für die skalare Erhaltungsgleichung.

Satz: (Rankine-Hugoniot Bedingung)
Ist $x = s(t)$ die Stoßfront einer Stoßwellenlösung von $u_t + f(u)_x = 0$, so gilt für die Stoßgeschwindigkeit $\dot{s}(t)$ die Rankine-Hugoniot Bedingung

$$\dot{s} = \frac{[f]}{[u]} = \frac{f(u(s(t)^-,t)) - f(u(s(t)^+,t))}{u(s(t)^-,t) - u(s(t)^+,t)} = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}.$$

Definition: (Stoßwellenlösung)
Eine Stoßwellenlösung u ist eine schwache Lösung der Erhaltungsgleichung Das Anfangswertproblem

$$u_t + f(u)_x = 0$$

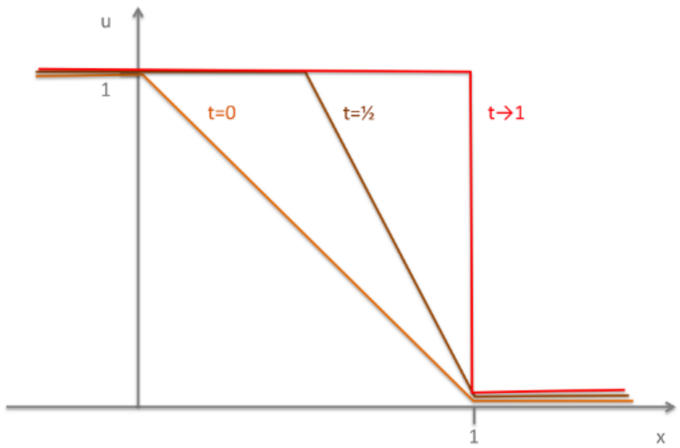
wenn eine Stoßfront $x = s(t)$, $s \in C^1$ existiert, so dass u jeweils für $x < s(t)$ und $x > s(t)$ eine klassische Lösung der PGD ist und u bei $x = s(t)$ ein Sprungstelle mit Sprunghöhe

$$[u](t) = u(s(t)^+,t) - u(s(t)^-,t) = u_r - u_l$$

besitzt. $\dot{s}(t)$ heißt Stoßgeschwindigkeit.

Beispiel: (Burgers Gleichung)
Die Burgers Gleichung ist gegeben durch die Flussfunktion $f(u) = \frac{u^2}{2}$, bzw. durch das Cauchy-Problem

$$\begin{aligned} u_t + uu_x = & \quad 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[\\ u = & \quad u_0 \qquad \text{auf } \mathbb{R}\times\{t=0\} \end{aligned}$$



- Die Lösung ist gegeben durch $u(t) = x_0 + tu_0(x_0)$.
- Falls u_0 gegeben ist durch

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \leq 0 \\ 1-x & : \quad 0 < x < 1 \\ 0 & : \quad x \geq 1 \end{cases}$$

  dann entwickelt $x(t)$ für $t \to 1$ eine Singularität.
- Eine klassische Lösung der Burgers Gleichung existiert nur lokal für $0 \leq t < 1$.
- Die lokale Lösung lautet für $t \in [0,1[$:

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & : \quad x < 1 \\ \frac{(1-x)}{(1-t)} & : \quad 0 \leq t \leq x < 1 \\ 0 & : \quad x > 1 \end{cases}$$

Definition: (schwache Lösung)
Eine Funktion $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$ heißt Integrallösung oder schwache Lösung der Erhaltungsgleichung $u_t + f(u)_x = 0$, falls für alle Testfunktionen v gilt:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (uv_t + f(u)v_x)\ dxdt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)v(x,0)\ dx = 0.$$

Bemerkung:

- Eine Integrallösung muss keine differenzierbare Funktion sein!
- Sie kann sogar Sprungstellen besitzen.

Definition: (Riemannproblem)
Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x = & \quad 0 & & \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[\\ u = & \quad u_0 & & \text{auf } \mathbb{R}\times\{t=0\} \end{aligned}$$

mit unstetigen Anfangsbedingungen

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : \quad x \leq 0 \\ u_r & : \quad x > 0 \end{cases}$$

heißt Riemannproblem für die skalare Erhaltungsgleichung.

Definition: (Stoßwellenlösung)
Eine Stoßwellenlösung u ist eine schwache Lösung der Erhaltungsgleichung Das Anfangswertproblem

$$u_t + f(u)_x = 0$$

wenn eine Stoßfront $x = s(t)$, $s \in C^1$ existiert, so dass u jeweils für $x < s(t)$ und $x > s(t)$ eine klassische Lösung der PGD ist und u bei $x = s(t)$ ein Sprungstelle mit Sprunghöhe

$$[u](t) = u(s(t)^+, t) - u(s(t)^-, t) = u_r - u_l$$

besitzt. $\dot{s}(t)$ heißt Stoßgeschwindigkeit.

Satz: (Rankine-Hugoniot Bedingung)
Ist $x = s(t)$ die Stoßfront einer Stoßwellenlösung von $u_t + f(u)_x = 0$, so gilt für die Stoßgeschwindigkeit $\dot{s}(t)$ die Rankine-Hugoniot Bedingung

$$\dot{s} = \frac{[f]}{[u]} = \frac{f(u(s(t)^-, t)) - f(u(s(t)^+, t))}{u(s(t)^-, t) - u(s(t)^+, t)} = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}.$$

Integrallösung und Entropiebedingung

Beispiel: (Rankine Hugoniot Bedingung für Burgers Gleichung)
Betrachte die Burgers Gleichung $u_t + uu_x = 0$ in $\mathbb{R}\times]0,\infty[$ und $u(x, t = 0) = x_0$.
Es sei

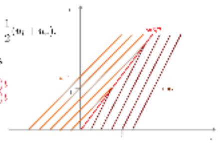
$$u_0(x) = \left\{ \begin{array}{lll} u_l & : & x < 0 \\ u_r & : & x > 0 \end{array} \right. \quad \text{mit } u_l > u_r.$$

Die Rankine-Hugoniot Bedingung lässt sich dann schreiben:

$$s = \frac{[f]}{[u]} = \frac{\frac{u_l^2}{2} - \frac{u_r^2}{2}}{u_l - u_r} = \frac{(u_l + u_r)(u_l - u_r)}{2(u_l - u_r)} = \frac{1}{2}(u_l + u_r).$$

Damit lautet die Stoßwellenlösung des Riemann Problems

$$u(x,t) = \left\{ \begin{array}{lll} u_l & : & x \leq \frac{1}{2}(u_l + u_r)t \\ u_r & : & x > \frac{1}{2}(u_l + u_r)t \end{array} \right.$$



Verdünnungswelle:
Betrachte nun das Riemann Problem mit der Burgers Gleichung $u_t + uu_x = 0$ in $\mathbb{R}\times]0,\infty[$ und $u(x, t = 0) = u_0$. Es sei

$$u_0(x) = \left\{ \begin{array}{lll} u_l & : & x < 0 \\ u_r & : & x > 0 \end{array} \right. \quad \text{mit } u_l < u_r.$$

Wir fordern weiter, dass $f \in C^2(\mathbb{R})$ und $f'' > 0$, d.h. die Flussfunktion ist strikt *konvex*. Setze $g := (f')^{-1}$.

Satz: (Eindeutigkeit der Entropielösung)
Erfüllt eine Integrallösung die Entropiebedingung, so ist diese Lösung eindeutig.
Entropielösungen sind eindeutige Lösungen.

3

Bemerkungen:

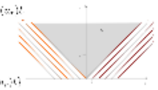
- Nach Annahme ist $f'' > 0$, also gilt $u_l < u_r \Rightarrow f'(u_l) < f'(u_r)$.
- Es gibt genau zwei Typen von Charakteristiken:

$$x(t) = x_0 - f'(u_l)t \quad \text{und} \quad x(t) = x_0 - f'(u_r)t.$$

- Die Kurvenschaar füllt nicht den gesamten $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ aus!
- Der Bereich

$$\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ : f'(u_l)t < x < f'(u_r)t\}$$

wird nicht durchlaufen. Hier kann eine beliebige Integrallösung gelten!



Frage: Welches ist die physikalisch richtige Lösung?

Idee: Eine zusätzliche Bedingung wählt die physikalisch richtige Integrallösung.

Definition: (Entropiebedingung)
Eine Integrallösung heißt Entropielösung, falls die Lösung die folgende Entropiebedingung oder Lax-Oleinik-Bedingung erfüllt:
Es gibt ein $C > 0$, so dass für alle $x, z \in \mathbb{R}$, $t > 0$ mit $z > 0$ gilt:

$$u(t, x + z) - u(t, x) < \frac{C}{t} z.$$

Bemerkung: Benannt nach Olga A. Oleinik (1925-2001) und Peter D. Lax (*1926)

Satz: (Verdünnungswelle)
Sei das Riemann Problem mit der Burgers Gleichung $u_t + uu_x = 0$ in $\mathbb{R}\times]0,\infty[$ und $u(x, t = 0) = u_0$ gegeben. Es sei

$$u_0(x) = \left\{ \begin{array}{lll} u_l & : & x \leq 0 \\ u_r & : & x > 0 \end{array} \right. \quad \text{mit } u_l < u_r.$$

Dann ist die Verdünnungswelle gegeben durch

$$u(x,t) = \left\{ \begin{array}{lll} u_l & : & x < f'(u_l)t \\ g(\frac{x}{t}) & : & f'(u_l)t < x < f'(u_r)t \\ u_r & : & x > f'(u_r)t \end{array} \right.$$

eine Integrallösung des Riemann Problems.
Bemerkung: Insbesondere ist die Verdünnungswelle eine stetige Funktion.

1

Problem: Integrallösungen sind nicht eindeutig!
Beispiel: Betrachte das Riemann Problem der Burgers Gleichung mit Anfangsbedingungen

$$u_0(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & : & x \leq 0 \\ 1 & : & x > 0 \end{array} \right.$$

Es gelten die beiden Integrallösungen

$$u_1(x,t) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & : & x < \frac{t}{2} \\ 1 & : & x > \frac{t}{2} \end{array} \right. \quad \text{(Stoßwelle)}$$

und

$$u_2(x,t) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & : & x < 0 \\ \frac{x}{t} & : & 0 \leq x \leq t \\ 1 & : & x > t \end{array} \right. \quad \text{(Verdünnungswelle)}$$

2

Beispiel: (Rankine-Hugoniot Bedingung für Burgers Gleichung)
Betrachte die Burgers Gleichung $u_t + uu_x = 0$ in $\mathbb{R}\times]0,\infty[$ und $u(x,t=0) = x_0$.
Es sei

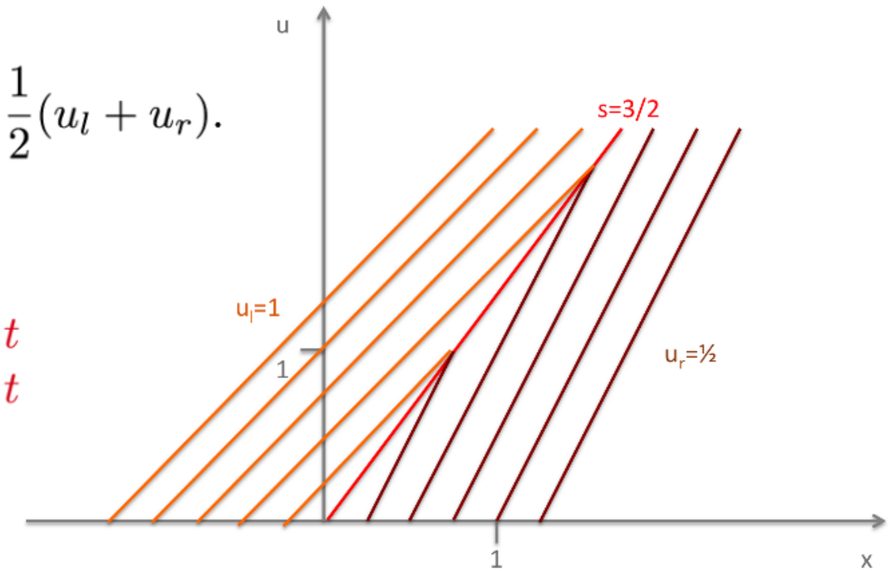
$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : \quad x \leq 0 \\ u_r & : \quad x > 0 \end{cases} \qquad \text{mit } u_l > u_r.$$

Die Rankine-Hugoniot Bedingung lässt sich dann schreiben:

$$\dot{s} = \frac{[f]}{[u]} = \frac{\frac{u_l^2}{2} - \frac{u_r^2}{2}}{u_l - u_r} = \frac{(u_l + u_r)(u_l - u_r)}{2(u_l - u_r)} = \frac{1}{2}(u_l + u_r).$$

Damit lautet die Stoßwellenlösung des Riemann Problems

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & : \quad x \leq \frac{1}{2}(u_l + u_r)t \\ u_r & : \quad x > \frac{1}{2}(u_l + u_r)t \end{cases}$$



Verdünnungswelle:
Betrachte nun das Riemann Problem mit der Burgers Gleichung $u_t + uu_x = 0$ in $\mathbb{R}\times]0,\infty[$ und $u(x, t = 0) = x_0$. Es sei

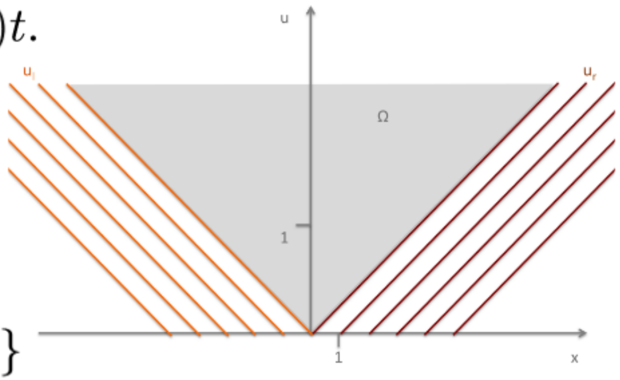
$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : \quad x \leq 0 \\ u_r & : \quad x > 0 \end{cases} \qquad \text{mit } u_l < u_r.$$

Wir fordern weiter, dass $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ und $f'' > 0$, d.h. die Flussfunktion ist *strikt konvex*. Setze $g := (f')^{-1}$.

Bemerkungen:

- Nach Annahme ist $f' > 0$, also gilt: $u_l < u_r \;\Rightarrow\; f'(u_l) < f'(u_r)$.
- Es gibt genau zwei Typen von Charakteristiken:

$$x(t) = x_0 + f'(u_l)t \quad \text{und} \quad x(t) = x_0 + f'(u_r)t.$$



- Die Kurvenschaar füllt nicht den gesamten $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ aus!
- Der Bereich

$$\Omega = \{(x.t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ : f'(u_l)t < x < f'(u_r)t\}$$

wird nicht durchlaufen, hier kann eine beliebige Integrallösung gelten!

Satz: (Verdünnungswelle)
Sei das Riemann Problem mit der Burgers Gleichung $u_t + uu_x = 0$ in $\mathbb{R}\times]0,\infty[$ und $u(x,t=0) = x_0$ gegeben. Es sei

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : \quad x \leq 0 \\ u_r & : \quad x > 0 \end{cases} \qquad \text{mit } u_l < u_r.$$

Dann ist die Verdünnungswelle gegeben durch

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & : \quad x < f'(u_l)t \\ g(\frac{x}{t}) & : \quad f'(u_l)t \leq x \leq f'(u_r)t \\ u_r & : \quad x > f'(u_r)t \end{cases}$$

eine Integrallösung des Riemann Problems.
Bemerkung: Insbesondere ist die Verdünnungswelle eine stetige Funktion. 1

Problem: Integrallösungen sind nicht eindeutig!

Beispiel: Betrachte das Riemann Problem der Burgers Gleichung mit Anfangsbedingungen

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \leq 0 \\ 1 & : \quad x > 0 \end{cases}$$

Es gelten die beiden Integrallösungen

$$u_1(x,t) = \begin{cases} 0 & : \quad x \leq \frac{t}{2} \\ 1 & : \quad x > \frac{t}{2} \end{cases} \qquad \text{(Stoßwelle)}$$

und

$$u_2(x,t) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 0 \\ \frac{x}{t} & : \quad 0 \leq x \leq t \\ 1 & : \quad x > t \end{cases} \qquad \text{(Verdünnungswelle)}$$

2

Frage: Welches ist die physikalisch richtige Lösung?

Idee: Eine zusätzliche Bedingung wählt die physikalisch richtige Integrallösung.

Definition: (Entropiebedingung)
Eine Integrallösung heißt Entropielösung, falls die Lösung die folgende Entropiebedingung oder Lax-Oleinik-Bedingung erfüllt:
Es gibt ein $C > 0$, so dass für alle $x, z \in \mathbb{R}$, $t > 0$ mit $z > 0$ gilt:

$$u(t, x+z) - u(t, x) < \frac{C}{t} z.$$

Bemerkung: Benannt nach Olga A. Oleinik (1925-2001) und Peter D. Lax (*1926)

Satz: (Eindeutigkeit der Entropielösung)
Erfüllt eine Integrallösung die Entropiebedingung, so ist diese Lösung eindeutig.
Entropielösungen sind eindeutige Lösungen.

3

Frage: Welches ist die physikalisch richtige Lösung?

Erinnerung

Differentialgleichungen II

Integrallösung und Entropiebedingung