

Differentialgleichungen II

Sommer 2018



Integrallösungen und Entropiebedingung

Erinnerung

Beispiel: (Burgers Gleichung)
Die Burgers Gleichung ist gegeben durch die Flussfunktion $f(u) = \frac{u^2}{2}$, bzw. durch das Cauchy-Problem

$$\begin{aligned} u_t - uv_x &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times]0, \infty[\\ u &= u_0 && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t=0\} \end{aligned}$$

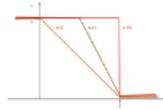
- Die Lösung ist gegeben durch $v(t) = u_0 + (u_0 v)_t$.
- Falls u_0 gegeben ist durch

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : x \leq 0 \\ \frac{1}{2} & : 0 \leq x < 1 \\ 0 & : x \geq 1 \end{cases}$$

dann entwickelt $s(t)$ für $t \rightarrow 1$ eine Singularität.

- Eine klassische Lösung der Burgers Gleichung existiert **nur lokal** für $0 \leq t < 1$.
- Die lokale Lösung lautet für $x \in \mathbb{R}$:

$$v(x,t) = \begin{cases} 1 & : x < 1 \\ \frac{1-t}{2} & : 0 \leq x < 1 \\ 0 & : x > 1 \end{cases}$$



Definition: (schwache Lösung)

Eine Funktion $v \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$ heißt **Integrallösung** oder **schwache Lösung** der Erhaltungsgleichung $u_t + f(u)_x = 0$, falls für alle Testfunktionen φ gilt:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (v \varphi_t + f(v) \varphi_x) dx dt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x) v(x, 0) dx = 0.$$

Bemerkung:

- Eine Integrallösung muss **keine** differenzierbare Funktion sein!
- Sie kann sogar **Sprungstellen** besitzen.

Definition: (Riemannproblem)

Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times]0, \infty[\\ u &= u_0 && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t=0\} \end{aligned}$$

mit unstetigen Anfangsbedingungen

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : x \leq 0 \\ u_r & : x > 0 \end{cases}$$

heißt **Riemannproblem** für die skalare Erhaltungsgleichung.

Satz: (Rankine-Hugoniot Bedingung)

Ist $x = s(t)$ die Stoßfront einer Stoßwellenlösung von $u_t + f(u)_x = 0$, so gilt für die Stoßgeschwindigkeit $\dot{s}(t)$ die **Rankine-Hugoniot Bedingung**

$$\dot{s} = \frac{[f]}{[u]} = \frac{f(u(s(t)^-, t)) - f(u(s(t)^+, t))}{u(s(t)^-, t) - u(s(t)^+, t)} = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}.$$

Definition: (Stoßwellenlösung)

Eine **Stoßwellenlösung** u ist eine schwache Lösung der Erhaltungsgleichung. Das Anfangswertproblem

$$u_t - f(u)_x = 0$$

wenn eine **Stoßfront** $x = s(t)$, $s \in C^1$ existiert, so dass u jeweils für $x < s(t)$ und $x > s(t)$ eine klassische Lösung der PGD ist und α bei $x = s(t)$ ein Sprungstelle mit Sprunghöhe

$$[u](t) = u(s(t)^+, t) - u(s(t)^-, t) = u_r - u_l$$

besitzt $\dot{s}(t)$ heißt **Stoßgeschwindigkeit**.

Beispiel: (Burgers Gleichung)

Die **Burgers Gleichung** ist gegeben durch die Flussfunktion $f(u) = \frac{u^2}{2}$, bzw. durch das Cauchy-Problem

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times]0, \infty[\\ u &= u_0 && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

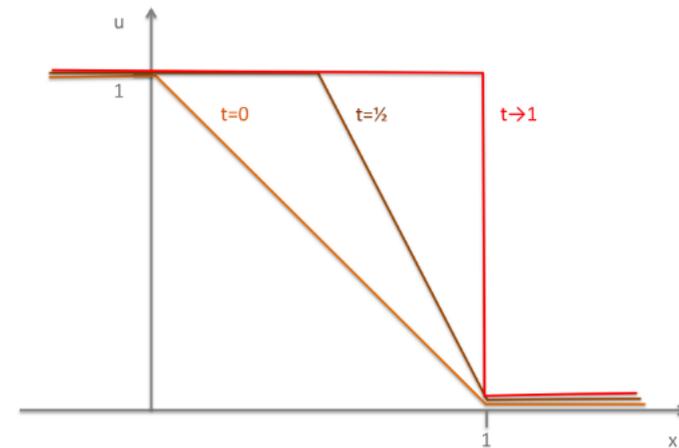
- Die Lösung ist gegeben durch $u(t) = x_0 + tu_0(x_0)$.
- Falls u_0 gegeben ist durch

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : x \leq 0 \\ 1 - x & : 0 < x < 1 \\ 0 & : x \geq 1 \end{cases}$$

dann entwickelt $x(t)$ für $t \rightarrow 1$ eine Singularität.

- Eine klassische Lösung der Burgers Gleichung existiert nur **lokal** für $0 \leq t < 1$.
- Die lokale Lösung lautet für $t \in [0, 1[$:

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & : x < 1 \\ \frac{(1-x)}{(1-t)} & : 0 \leq t \leq x < 1 \\ 0 & : x > 1 \end{cases}$$



Definition: (schwache Lösung)

Eine Funktion $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$ heißt **Integrallösung** oder **schwache Lösung** der Erhaltungsgleichung $u_t + f(u)_x = 0$, falls für alle Testfunktionen v gilt:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (uv_t + f(u)v_x) dxdt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)v(x, 0) dx = 0.$$

Bemerkung:

- Eine Integrallösung muss **keine** differenzierbare Funktion sein!
- Sie kann sogar **Sprungstellen** besitzen.

Definition: (Riemannproblem)

Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times]0, \infty[\\ u &= u_0 && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

mit un stetigen Anfangsbedingungen

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : x \leq 0 \\ u_r & : x > 0 \end{cases}$$

heißt **Riemannproblem** für die skalare Erhaltungsgleichung.



Definition: (Stoßwellenlösung)

Eine **Stoßwellenlösung** u ist eine schwache Lösung der Erhaltungsgleichung Das Anfangswertproblem

$$u_t + f(u)_x = 0$$

wenn eine **Stoßfront** $x = s(t)$, $s \in C^1$ existiert, so dass u jeweils für $x < s(t)$ und $x > s(t)$ eine klassische Lösung der PGD ist und u bei $x = s(t)$ ein Sprungstelle mit Sprunghöhe

$$[u](t) = u(s(t)^+, t) - u(s(t)^-, t) = u_r - u_l$$

besitzt. $\dot{s}(t)$ heißt **Stoßgeschwindigkeit**.

Satz: (Rankine-Hugoniot Bedingung)

Ist $x = s(t)$ die Stoßfront einer Stoßwellenlösung von $u_t + f(u)_x = 0$, so gilt für die Stoßgeschwindigkeit $\dot{s}(t)$ die **Rankine-Hugoniot Bedingung**

$$\dot{s} = \frac{[f]}{[u]} = \frac{f(u(s(t)^-, t)) - f(u(s(t)^+, t))}{u(s(t)^-, t) - u(s(t)^+, t)} = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}.$$

Integrallösung und Entropiebedingung

Beispiel: (Rankine-Hugoniot-Bedingung für Burgers Gleichung)
Betrachte die Burgers Gleichung $u_t - uu_x = 0$ in $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ und $u(x, t=0) = u_0$.
Es sei

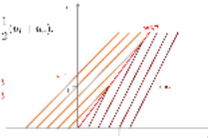
$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : x < 0 \\ u_r & : x > 0 \end{cases} \quad \text{mit } u_l > u_r.$$

Die Rankine-Hugoniot-Bedingung lässt sich dann schreiben:

$$\bar{u} = \frac{[u]}{[f]} = \frac{u_l - u_r}{u_l - u_r} = \frac{(u_l + u_r)(u_l - u_r)}{2(u_l - u_r)} = \frac{1}{2}(u_l + u_r).$$

Damit lautet die Stöbberlösung des Riemann Problems

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & : x \leq \frac{1}{2}(u_l + u_r)t \\ u_r & : x > \frac{1}{2}(u_l + u_r)t \end{cases}$$



Satz: (Eindeutigkeit der Entropielösung)
Erfüllt eine Integrallösung die Entropiebedingung, so ist diese Lösung eindeutig.
Entropielösungen sind eindeutige Lösungen.

3

Frage: Welches ist die physikalisch richtige Lösung?

Idee: Eine zusätzliche Bedingung wählt die physikalisch richtige Integrallösung.

Definition: (Entropiebedingung)
Eine Integrallösung heißt **Entropielösung**, falls die Lösung die folgende **Entropiebedingung** oder **Lax-Entropie-Bedingung** erfüllt:
Es gibt ein $C > 0$, so dass für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $t > 0$ mit $x_2 > x_1$ durch

$$u(t, x_1 + \varepsilon) - u(t, x_2) < \frac{C}{\varepsilon}.$$

Bemerkung: Bonaventura nach Olga A. Oleinik (1925-2001) und Peter D. Lax (1926)

Verdünnungswelle:
Betrachte nun das Riemann Problem mit der Burgers Gleichung $u_t + uu_x = 0$ in $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ und $u(x, t=0) = u_0$. Es sei

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : x < 0 \\ u_r & : x > 0 \end{cases} \quad \text{mit } u_l < u_r.$$

Wir fordern weiter, dass $f \in C^2(\mathbb{R})$ und $f'' > 0$, d.h. die Flussfunktion ist strikt konvex. Setze $g := (f')^{-1}$.

Bemerkungen

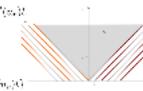
- Nach Ansatze ist $f' > 0$, also gilt $u_l < u_r \Rightarrow f'(u_l) < f'(u_r)$.
- Es gibt genau zwei Typen von Charakteristiken:

$$x(t) = u_l - f'(u_l)t \quad \text{und} \quad x(t) = u_r - f'(u_r)t$$

- Die Kurvenschar füllt nicht den gesamten $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ aus
- Der Bereich

$$\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ : f'(u_l)t < x < f'(u_r)t\}$$

ist nicht durchaufl. Hier kann eine beliebige Integrallösung gesetzt



Satz: (Verdünnungswelle)

Sei das Riemann Problem mit der Burgers Gleichung $u_t + uu_x = 0$ in $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ und $u(x, t=0) = u_0$ gegeben. Es sei

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : x \leq 0 \\ u_r & : x > 0 \end{cases} \quad \text{mit } u_l < u_r.$$

Dann ist die **Verdünnungswelle** gegeben durch

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & : x < f'(u_l)t \\ g\left(\frac{x}{t}\right) & : f'(u_l)t \leq x < f'(u_r)t \\ u_r & : x > f'(u_r)t \end{cases}$$

eine **Integrallösung des Riemann Problems**.

Bemerkung: Insbesondere ist die Verdünnungswelle eine stetige Funktion. 1

Problem: Integrallösungen sind nicht eindeutig!
Beispiel: Betrachte das Riemann Problem der Burgers Gleichung mit Anfangswert

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 0 \\ 1 & : x > 0 \end{cases}$$

Es gelten die beiden Flussfunktionen

$$f_1(u) = \begin{cases} 0 & : u \leq \frac{1}{2} \\ u^2 & : u > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{Stoßwelle})$$

oder

$$f_2(u) = \begin{cases} 0 & : u \leq 0 \\ u & : 0 \leq u \leq 1 \\ u^2 & : u > 1 \end{cases} \quad (\text{Verdünnungswelle})$$

2

Beispiel: (Rankine-Hugoniot Bedingung für Burgers Gleichung)

Betrachte die Burgers Gleichung $u_t + uu_x = 0$ in $\mathbb{R} \times]0, \infty[$ und $u(x, t = 0) = x_0$.

Es sei

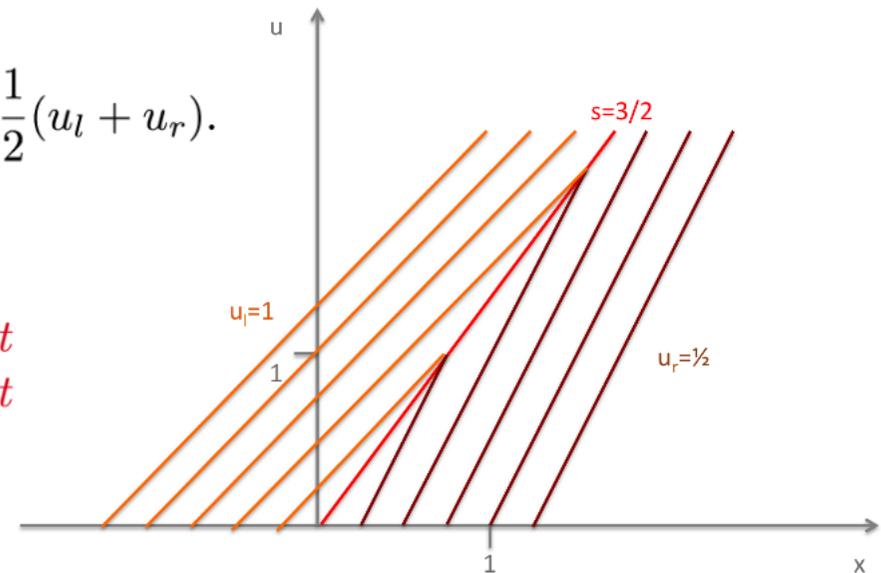
$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : x \leq 0 \\ u_r & : x > 0 \end{cases} \quad \text{mit } u_l > u_r.$$

Die Rankine-Hugoniot Bedingung lässt sich dann schreiben:

$$\dot{s} = \frac{[f]}{[u]} = \frac{\frac{u_l^2}{2} - \frac{u_r^2}{2}}{u_l - u_r} = \frac{(u_l + u_r)(u_l - u_r)}{2(u_l - u_r)} = \frac{1}{2}(u_l + u_r).$$

Damit lautet die Stoßwellenlösung des Riemann Problems

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & : x \leq \frac{1}{2}(u_l + u_r)t \\ u_r & : x > \frac{1}{2}(u_l + u_r)t \end{cases}$$



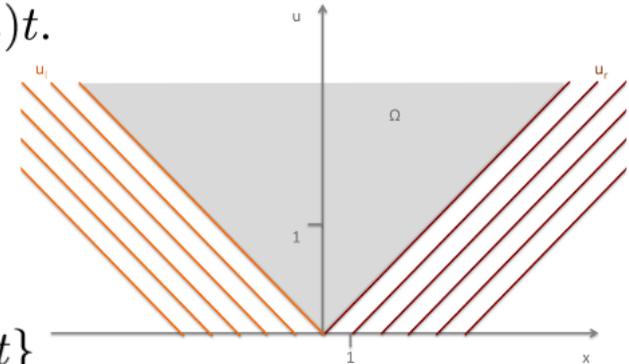
Bemerkungen:

- Nach Annahme ist $f' > 0$, also gilt: $u_l < u_r \Rightarrow f'(u_l) < f'(u_r)$.
- Es gibt genau zwei Typen von Charakteristiken:

$$x(t) = x_0 + f'(u_l)t \quad \text{und} \quad x(t) = x_0 + f'(u_r)t.$$

- Die Kurvenschar füllt nicht den gesamten $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ aus!
- Der Bereich

$$\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ : f'(u_l)t < x < f'(u_r)t\}$$



wird nicht durchlaufen, hier kann eine beliebige Integrallösung gelten!

Satz: (Verdünnungswelle)

Sei das Riemann Problem mit der Burgers Gleichung $u_t + uu_x = 0$ in $\mathbb{R} \times]0, \infty[$ und $u(x, t = 0) = x_0$ gegeben. Es sei

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : x \leq 0 \\ u_r & : x > 0 \end{cases} \quad \text{mit } u_l < u_r.$$

Dann ist die **Verdünnungswelle** gegeben durch

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & : x < f'(u_l)t \\ g\left(\frac{x}{t}\right) & : f'(u_l)t \leq x \leq f'(u_r)t \\ u_r & : x > f'(u_r)t \end{cases}$$

eine Integrallösung des Riemann Problems.

Bemerkung: Insbesondere ist die Verdünnungswelle eine stetige Funktion.

Problem: Integrallösungen sind nicht eindeutig!

Beispiel: Betrachte das Riemann Problem der Burgers Gleichung mit Anfangsbedingungen

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 0 \\ 1 & : x > 0 \end{cases}$$

Es gelten die beiden Integrallösungen

$$u_1(x, t) = \begin{cases} 0 & : x \leq \frac{t}{2} \\ 1 & : x > \frac{t}{2} \end{cases} \quad (\text{Stoßwelle})$$

und

$$u_2(x, t) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ \frac{x}{t} & : 0 \leq x \leq t \\ 1 & : x > t \end{cases} \quad (\text{Verdünnungswelle})$$

2

Frage: Welches ist die physikalisch richtige Lösung?

Idee: Eine zusätzliche Bedingung wählt die physikalisch richtige Integrallösung.

Definition: (Entropiebedingung)

Eine Integrallösung heißt **Entropielösung**, falls die Lösung die folgende **Entropiebedingung** oder **Lax-Oleinik-Bedingung** erfüllt:

Es gibt ein $C > 0$, so dass für alle $x, z \in \mathbb{R}$, $t > 0$ mit $z > 0$ gilt:

$$u(t, x + z) - u(t, x) < \frac{C}{t}z.$$

Bemerkung: Benannt nach Olga A. Oleinik (1925-2001) und Peter D. Lax (*1926)

Satz: (Eindeutigkeit der Entropielösung)

Erfüllt eine Integrallösung die Entropiebedingung, so ist diese Lösung eindeutig.

Entropielösungen sind eindeutige Lösungen.

3

Frage: Welches ist die physikalisch richtige Lösung?

Erinnerung

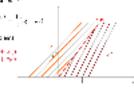
$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$
 $f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$
 $f''(x) = \frac{6}{x^4}$
 $f'''(x) = -\frac{24}{x^5}$
 $f^{(4)}(x) = \frac{240}{x^6}$
 $f^{(5)}(x) = -\frac{2880}{x^7}$
 $f^{(6)}(x) = \frac{28800}{x^8}$
 $f^{(7)}(x) = -\frac{345600}{x^9}$
 $f^{(8)}(x) = \frac{3456000}{x^{10}}$
 $f^{(9)}(x) = -\frac{34560000}{x^{11}}$
 $f^{(10)}(x) = \frac{345600000}{x^{12}}$
 $f^{(11)}(x) = -\frac{3456000000}{x^{13}}$
 $f^{(12)}(x) = \frac{34560000000}{x^{14}}$
 $f^{(13)}(x) = -\frac{345600000000}{x^{15}}$
 $f^{(14)}(x) = \frac{3456000000000}{x^{16}}$
 $f^{(15)}(x) = -\frac{34560000000000}{x^{17}}$
 $f^{(16)}(x) = \frac{345600000000000}{x^{18}}$
 $f^{(17)}(x) = -\frac{3456000000000000}{x^{19}}$
 $f^{(18)}(x) = \frac{34560000000000000}{x^{20}}$
 $f^{(19)}(x) = -\frac{345600000000000000}{x^{21}}$
 $f^{(20)}(x) = \frac{3456000000000000000}{x^{22}}$

Differentialgleichungen II



Integrallösung und Entropiebedingung

Beispiel 1: Ein System (z.B. ein Gas) wird durch eine Wärmequelle Q erwärmt. Die Temperatur T steigt an, die Entropie S nimmt zu. Die Entropieänderung ΔS ist durch die Wärme Q und die Temperatur T bestimmt: $\Delta S = \int \frac{dQ}{T}$.



Beispiel 2: Ein System wird durch eine Wärmequelle Q erwärmt. Die Temperatur T steigt an, die Entropie S nimmt zu. Die Entropieänderung ΔS ist durch die Wärme Q und die Temperatur T bestimmt: $\Delta S = \int \frac{dQ}{T}$.

Step 1: Lösung der DGL
 Die DGL ist eine lineare DGL 1. Ordnung. Die Lösung ist $y(x) = e^{-x} + C$.

Beispiel 3: Ein System wird durch eine Wärmequelle Q erwärmt. Die Temperatur T steigt an, die Entropie S nimmt zu. Die Entropieänderung ΔS ist durch die Wärme Q und die Temperatur T bestimmt: $\Delta S = \int \frac{dQ}{T}$.

Beispiel 4: Ein System wird durch eine Wärmequelle Q erwärmt. Die Temperatur T steigt an, die Entropie S nimmt zu. Die Entropieänderung ΔS ist durch die Wärme Q und die Temperatur T bestimmt: $\Delta S = \int \frac{dQ}{T}$.

Beispiel 5: Ein System wird durch eine Wärmequelle Q erwärmt. Die Temperatur T steigt an, die Entropie S nimmt zu. Die Entropieänderung ΔS ist durch die Wärme Q und die Temperatur T bestimmt: $\Delta S = \int \frac{dQ}{T}$.

Beispiel 6: Ein System wird durch eine Wärmequelle Q erwärmt. Die Temperatur T steigt an, die Entropie S nimmt zu. Die Entropieänderung ΔS ist durch die Wärme Q und die Temperatur T bestimmt: $\Delta S = \int \frac{dQ}{T}$.