DGL II

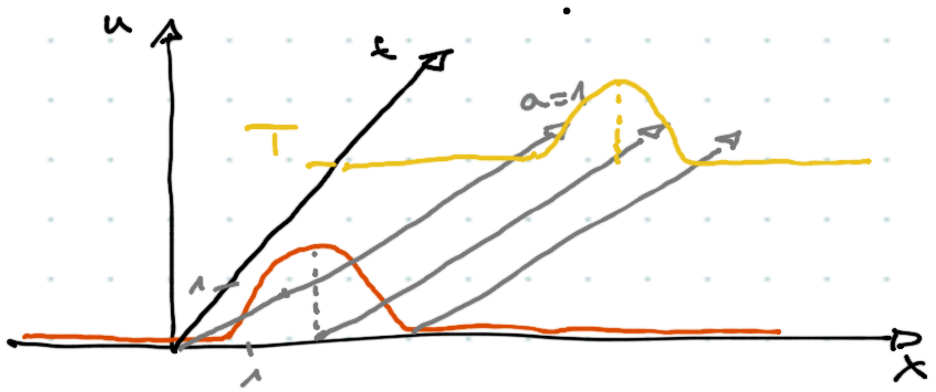
17.04.2018

J. Behrens

① Interpretation der Lösung des Transportproblems:

$$u(x,t) = u_0(x - at)$$

Sei u_0 ein Anfangsprofil



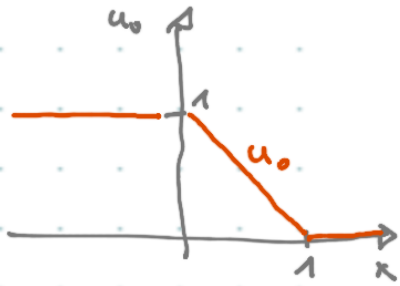
D.h. ein Anfangsprofil wird entlang der Charakteristiken (konstante "Geschwindigkeitsvektoren") a verschoben (transportiert)

② Burgers Gleichung

- Betrachte Cauchy-Problem mit Flussfunktion $f(u) = \frac{u^2}{2}$

$$u_t + u\,u_x = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R} \times]0,\infty[$$
$$u = u_0 \qquad \text{auf } \mathbb{R} \times \{t=0\}$$

- mit Anfangsbedingung $u_0 = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 1-x, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$



- Löse mit Methode der Charakteristiken:

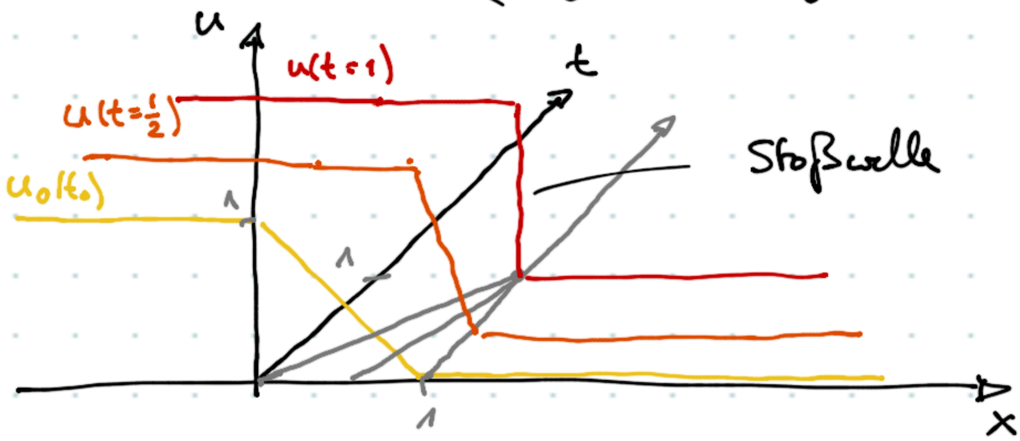
$$\dot{x} = u \quad , \quad x(0) = x_0$$

- Die Lösung bleibt entlang der Kurve $x(t)$ konstant, d.h.

$$\dot{x} = u_0(x_0) \implies x(t) = x_0 + t\,u_0(x_0)$$

- Einsetzen in gegebenes u_0:

$$x(t) = \begin{cases} t + x_0 & x_0 \leq 0 \\ (1-x_0)t + x_0 & 0 < x_0 < 1 \\ x_0 & x_0 > 1 \end{cases}$$



③ <u>Test funktion:</u>

- Sei $v : \mathbb{R} \times [0, \infty[\to \mathbb{R}$ diff'bare Funktion mit kompaktem Träger
- Multipliziere $u_t + f(u)_x = 0$ mit v und integriere:

$$0 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u_t + f(u)_x) v \, dx\,dt$$

$$= -\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u v_t \, dx\,t + \int_{-\infty}^\infty \cancel{u(x,\infty) \underbrace{v(x,\infty)}_{=0}} dx - \int_{-\infty}^\infty \underbrace{u(x,0)}_{= u_0(x)} v(x,0) dx$$

$$- \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u) v_x \, dx\,dt + \int_0^\infty \cancel{u(\infty,t) \underbrace{v(\infty,t)}_{=0}} dt - \int_0^\infty \cancel{u(-\infty,t) \underbrace{v(-\infty,t)}_{=0}} dt$$

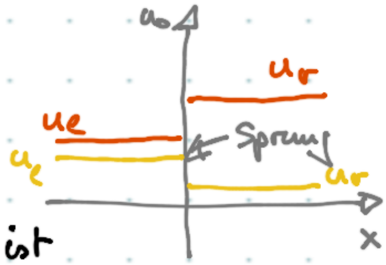
$$= -\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u v_t \, dx\,dt - \int_{-\infty}^\infty u_0(x) v(x,0) dx - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u) v_x \, dx\,dt$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u v_t + f(u) v_x) dx\,dt - \int_{-\infty}^\infty u_0(x) v(x,0) dt$$

(4) Riemann Problem für die Burgers Gleichung

- Burgers Gleichung: $u_t + u u_x = 0$ in $\mathbb{R} \times]0,\infty[$
  $u = u_0$ auf $\mathbb{R} \times \{t=0\}$

- Riemann Problem: $u_0(x) = \begin{cases} u_\ell & : x \leq 0 \\ u_r & : x > 0 \end{cases}$



- Stoßwellen Lösung: Für $u_\ell \neq u_r$ $(u_\ell > u_r)$ ist die Stoßwelle

$$u(x,t) = \begin{cases} u_\ell & : x \leq s(t) \\ u_r & : x > s(t) \end{cases}$$

ist eine Integrallösung.

- $s(t)$ ist die Lage der Stoßfront

- Die Stoßfront bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\dot{s}(t)$ mit

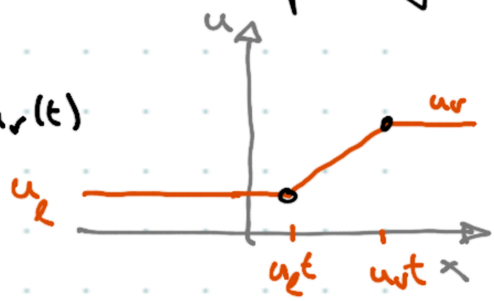
$$\underbrace{\dot{s}(t) = \frac{[f]}{[u]} = \frac{f(u_\ell) - f(u_r)}{u_\ell - u_r}}_{\text{Rankine-Hugoniot-Bedingung}} \quad \text{und} \quad s(0) = 0$$

- Für $u_\ell < u_r$ ist die Verdünnungswelle eine Integrallösung:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_\ell & : x \leq u_\ell t \\ \frac{x}{t} & : u_\ell t \leq x \leq u_r(t) \\ u_r & : x \geq u_r t \end{cases}$$

stetig!

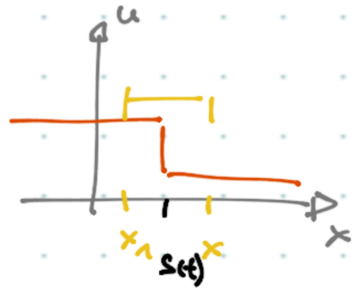
nicht diffbar an $u_\ell t$ und $u_r t$.



(5) Herleitung Rankine-Hugoniot Bedingung:

- Eine Integrallösung erfüllt:

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u(\xi,t)\,d\xi = f(u(x_1,t)) - f(u(x_2,t))$$



- Wähle $x_1 < s(t) < x_2$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\int_{x_1}^{s(t)} u(\xi,t)\,d\xi + \int_{s(t)}^{x_2} u(\xi,t)\,d\xi\right) = f(u(x_1,t)) - f(u(x_2,t))$$

- Nun ist u rechts und links von $s(t)$ diff'bar, daher

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{s(t)} \frac{\partial u}{\partial t}\,d\xi + \dot{s}\,u(s(t)^-,t) + \int_{s(t)}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial t}\,d\xi - \dot{s}\,u(s(t)^+,t) + f_2 - f_1 = 0$$

mit $f_2 = f(u(x_2,t))$, $f_1 = f(u(x_1,t))$.

- Grenzübergang $x_1 \to s(t)^-$, $x_2 \to s(t)^+$: verschwinden die Integrale

$$\Rightarrow \dot{s}\,\underbrace{u(s(t)^-,t)}_{u_l} - \dot{s}\,\underbrace{u(s(t)^+,t)}_{u_r} = f(\underbrace{u(s(t)^-,t)}_{u_l}) - f(\underbrace{u(s(t)^+,t)}_{u_r})$$

$$\Rightarrow \quad \dot{s} = \frac{[f]}{[u]} \qquad \square$$