Differentialgleichungen II

Sommer 2018

Einführung

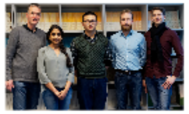
Ihr Professor

Koordinaten:

Prof. Dr. Jörn Behrens
Uni Hamburg/ CliSAP
Grindelberg 5, Room 411 (4rd floor)
Bundesstraße 55, Room 120 (1st floor)
Tel. (040) 42838 7734
mail joern.behrens@uni-hamburg.de

Sprechstunde in Harburg: Mo 10:30-11:15
Gebäude E, Raum 3.078
(bitte vorher Termin per E-Mail vereinbaren)

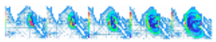
Hintergrund



Kurz-CV

seit 2009	Prof. @ Uni Hamburg, KlimaCampus/Dept. Mathematik
2006-2009	Leitung Tsunami Gruppe @ AWI, Dozent @ Uni Bremen
2005	Habilitation (Mathematik) @ TUM
2003-2004	Visiting Scientist @ NCAR, Boulder, CO, USA
1998-2006	Wiss. Assistent + Akad. Rat @ TUM, Wiss. Rechnen
1996-1998	Post-Doc @ AWI
1991-1996	Dr. rer. nat. (Mathematik) @ AWI/Uni Bremen
1991	Diplom Mathematik @ Uni Bonn

Forschungsinteressen

Adaptive Tsunami Modellierung 

Adaptive Atmosphären Modellierung 

Gitter Erzeugung

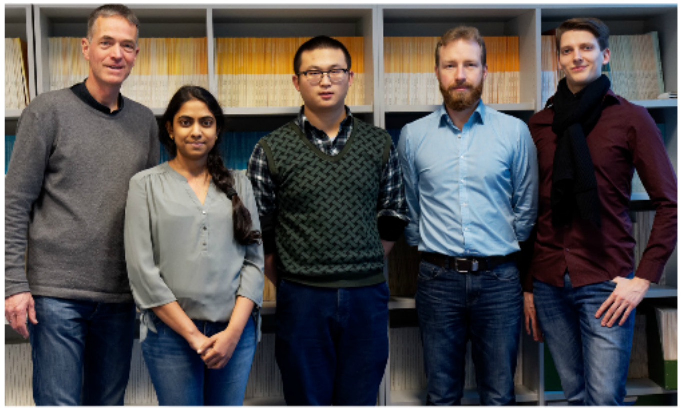
Multi-Skalen Simulationen

Koordinaten:

Prof. Dr. Jörn Behrens
Uni Hamburg/ CliSAP
Grindelberg 5, Room 411 (4rd floor)
Bundesstraße 55, Room 120 (1st floor)
Tel. (040) 42838 7734
mail joern.behrens@uni-hamburg.de

Sprechstunde in Harburg: Mo 10:30-11:15
Gebäude E, Raum 3.079
(bitte vorher Termin per E-Mail vereinbaren)

Hintergrund

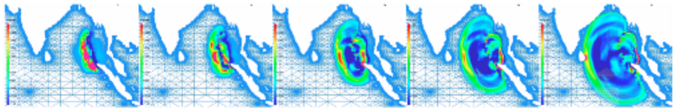


Kurz-CV

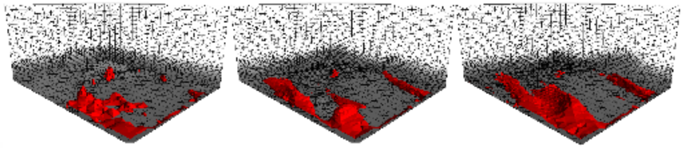
seit 2009 Prof. @ Uni Hamburg, KlimaCampus/Dept. Mathematik
2006-2009 Leitung Tsunami Gruppe @ AWI, Dozent @ Uni Bremen
2005 Habilitation (Mathematik) @ TUM
2003-2004 Visiting Scientist @ NCAR, Boulder, CO, USA
1998-2006 Wiss. Assistent + Akad. Rat @ TUM, Wiss. Rechnen
1996-1998 Post-Doc @ AWI
1991-1996 Dr. rer. nat. (Mathematik) @ AWI/Uni Bremen
1991 Diplom Mathematik @ Uni Bonn

Forschungsinteressen

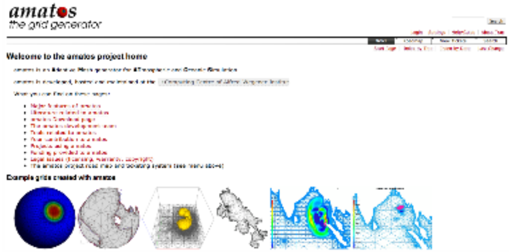
Adaptive Tsunami Modellierung



Adaptive Atmosphären Modellierung



Gitter Erzeugung



Multi-Skalen Simulationen

Infos zum Kurs

Literatur

Beispiele!

G. Bärwolff: *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure* (2. Aufl.), Springer, Berlin/Heidelberg, 2009.

R. Ansorge, H.J. Oberle, K. Rothe, T. Sonar: *Mathematik für Ingenieure 2* (4. Aufl.), Wiley-VCH, Berlin, 2011.

I. Gasser: *Skriptum zur Vorlesung DGL II*, Sommersemester 2016.
https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/d2/

Formelsammlung

K.Vetters: *Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik*, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2004.

Übungsleitung und Übungen

Dr. Kai Rothe

https://www.math.uni-hamburg.de/home/rothe/

Materialien:

http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/d2/18/lm.html

Bitte gründlich vorbereiten!

Literatur

Beispiele!

G. Bärwolff: *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure* (2. Aufl.), Springer, Berlin/Heidelberg, 2009.

R. Ansorge, H.J. Oberle, K. Rothe, T. Sonar: *Mathematik für Ingenieure 2* (4. Aufl.), Wiley-VCH, Berlin, 2011.

I. Gasser: *Skriptum zur Vorlesung DGL II*, Sommersemester 2016.
https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/d2/

Formelsammlung

K.Vetters: *Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik*, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2004.

Übungsleitung und Übungen

Dr. Kai Rothe

https://www.math.uni-hamburg.de/home/rothe/

Materialien:

http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/d2/18/lm.html

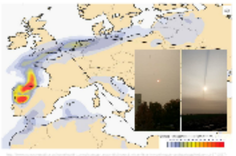
Bitte gründlich vorbereiten!

Motivation

Transportgleichung:

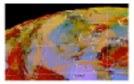
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0$$

Transport von Rauchwolken



Transport von Vulkanasche

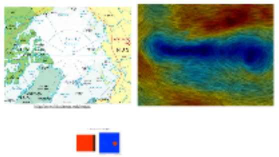
Eyjafjallajokull Eruption, Mai 2010



Satellitenbeobachtung

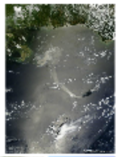
Simulation

Arctischer Ozonabbau



Ölausbreitung

Satellitenaufnahmen des Deepwater Horizon Unfalls April 2010



Massenbalance

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho(x)\,dx = -\int_{\partial V} \ldots$$

Kontinuitätsgleichung

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho(x) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0}$$

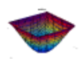
Erhaltungsprinzip

Masse M im Kontrollvolumen V

$$M = \int_V \rho(x)\,dx$$

Variationsprinzip

Idee: Leite PDGl aus physikalischem Gesetz (Minimierung) her!



Herleitung

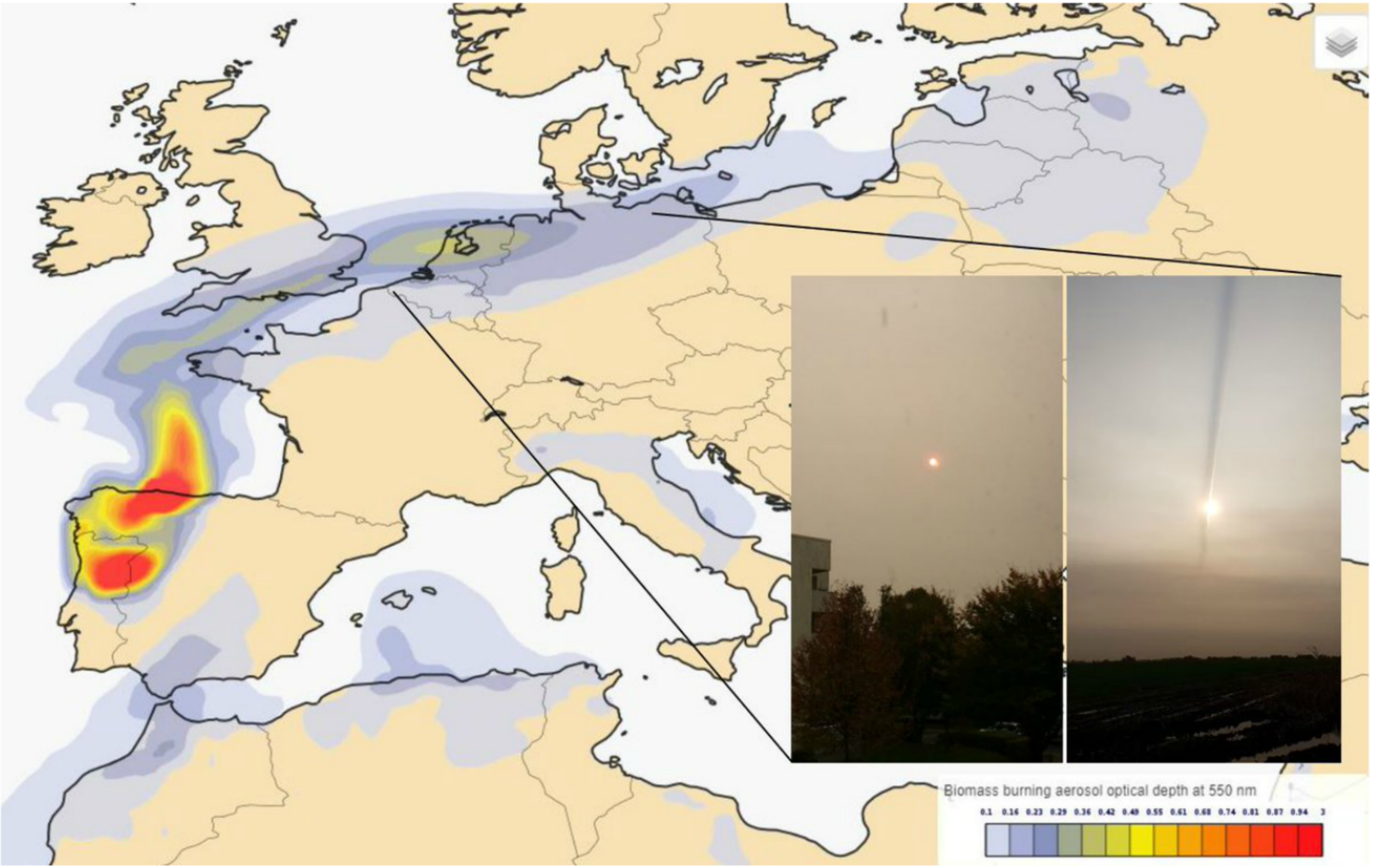
Poisson Gleichung

$$\boxed{\Delta u := (\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2)u = 0}$$

Transportgleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0$$

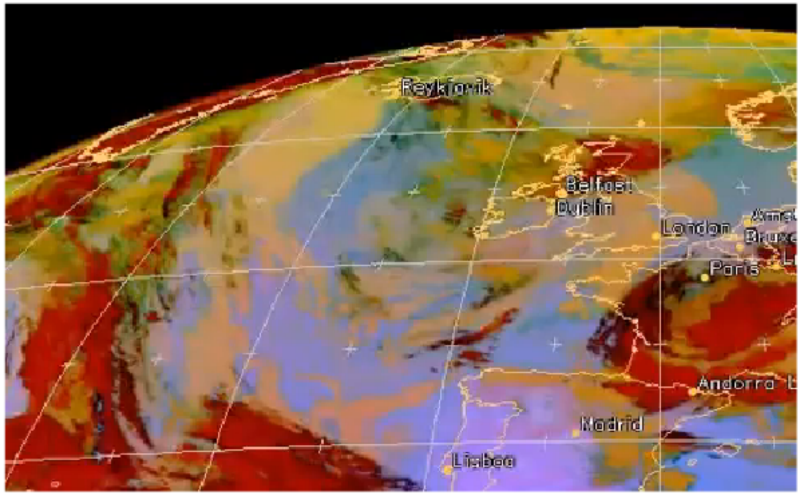
Transport von Rauchwolken



http ://www.severe-weather.eu/news/north-central-europe-under-thick-smoke-from-fires-in-north-spain-and-portugal-today-oct-17-2017/

Transport von Vulkanasche

Eyjafjallajokull Eruption, Mai 2010



Satellitenbeobachtung

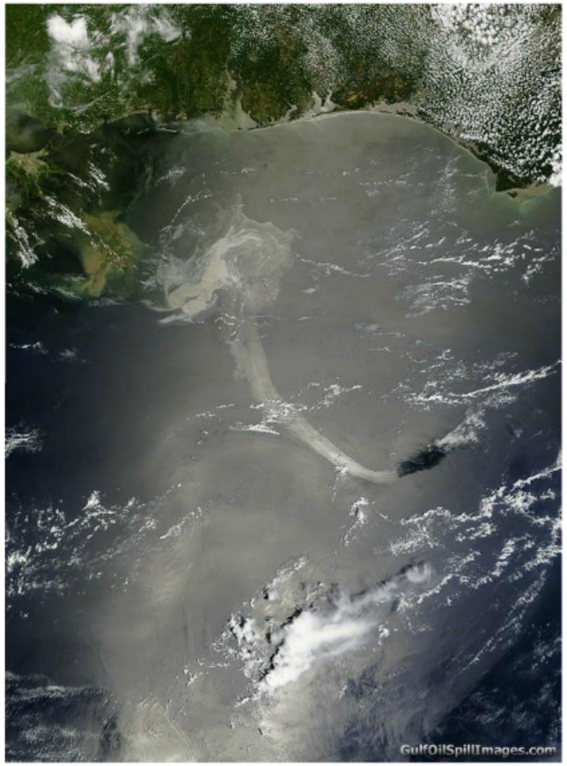
Simulation

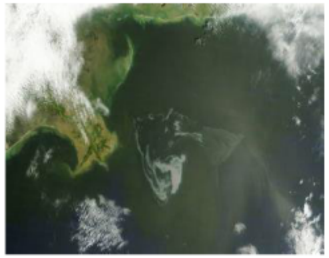
uption, Mai 2010

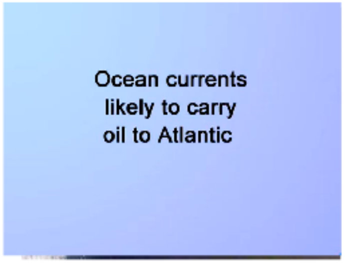
Simulation

Ölausbreitung

Satellitenaufnahmen des Deepwater Horizon Unfalls
April 2010





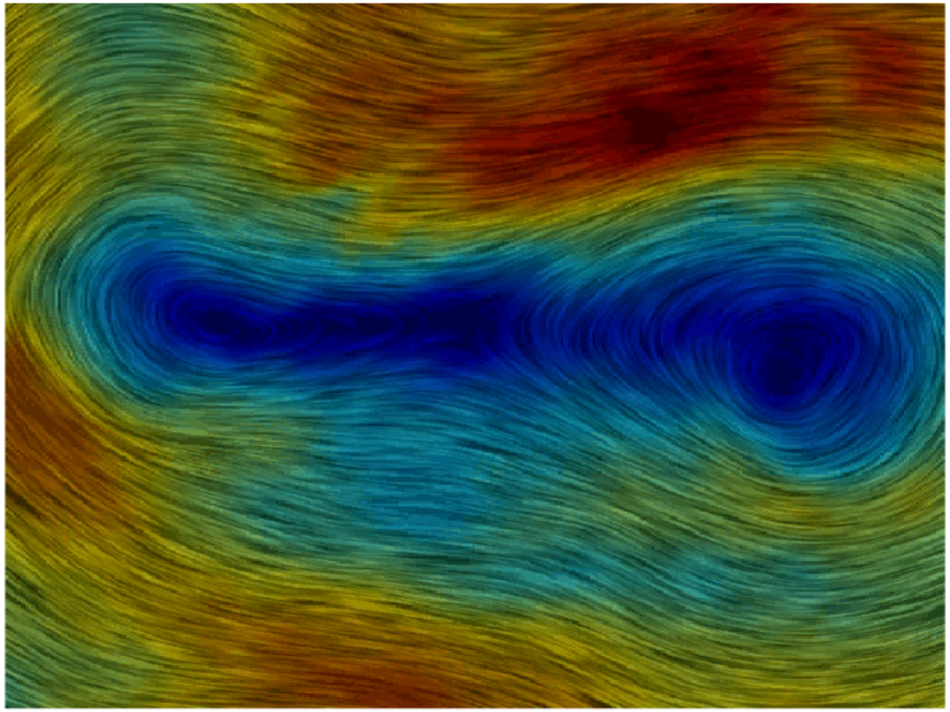


Ocean currents likely to carry oil to Atlantic

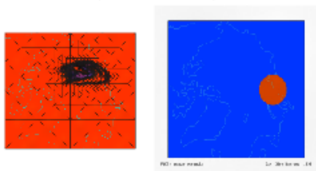
Arctischer Ozonabbau

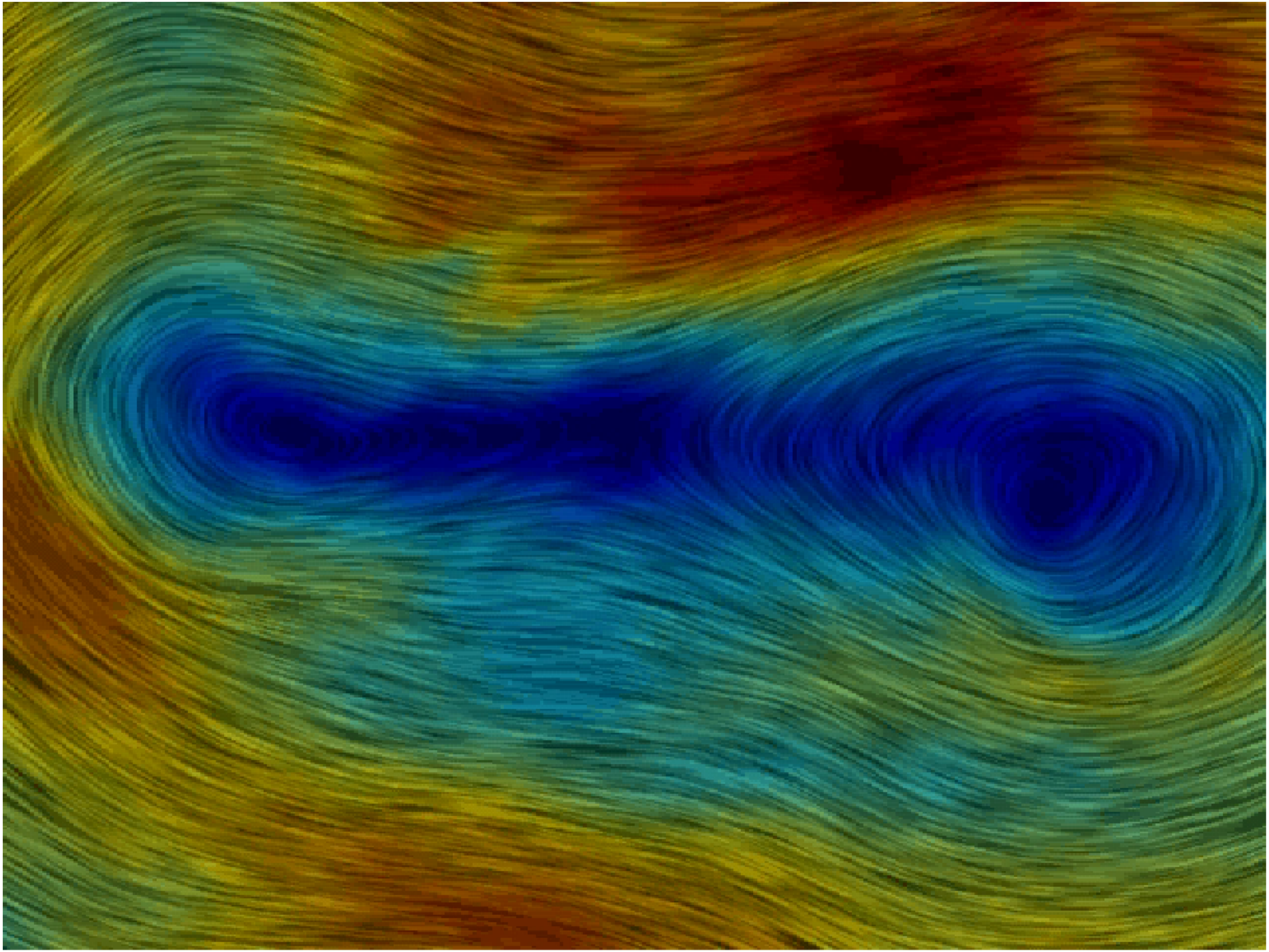
Vorgegebenes Windfeld in Arctischer Stratosphäre (ca. 18 km Höhe)

http://www.lib.utexas.edu/maps

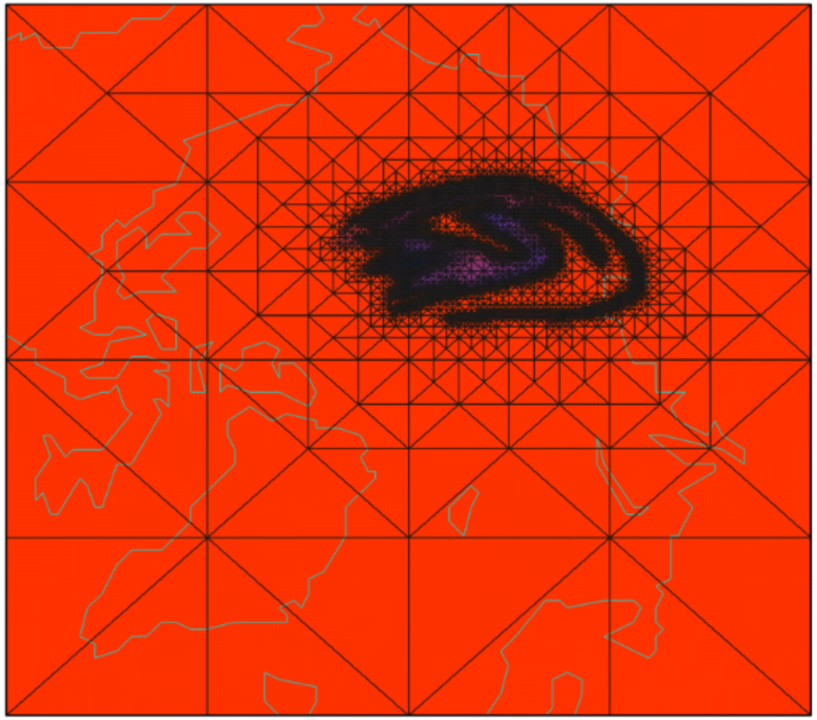


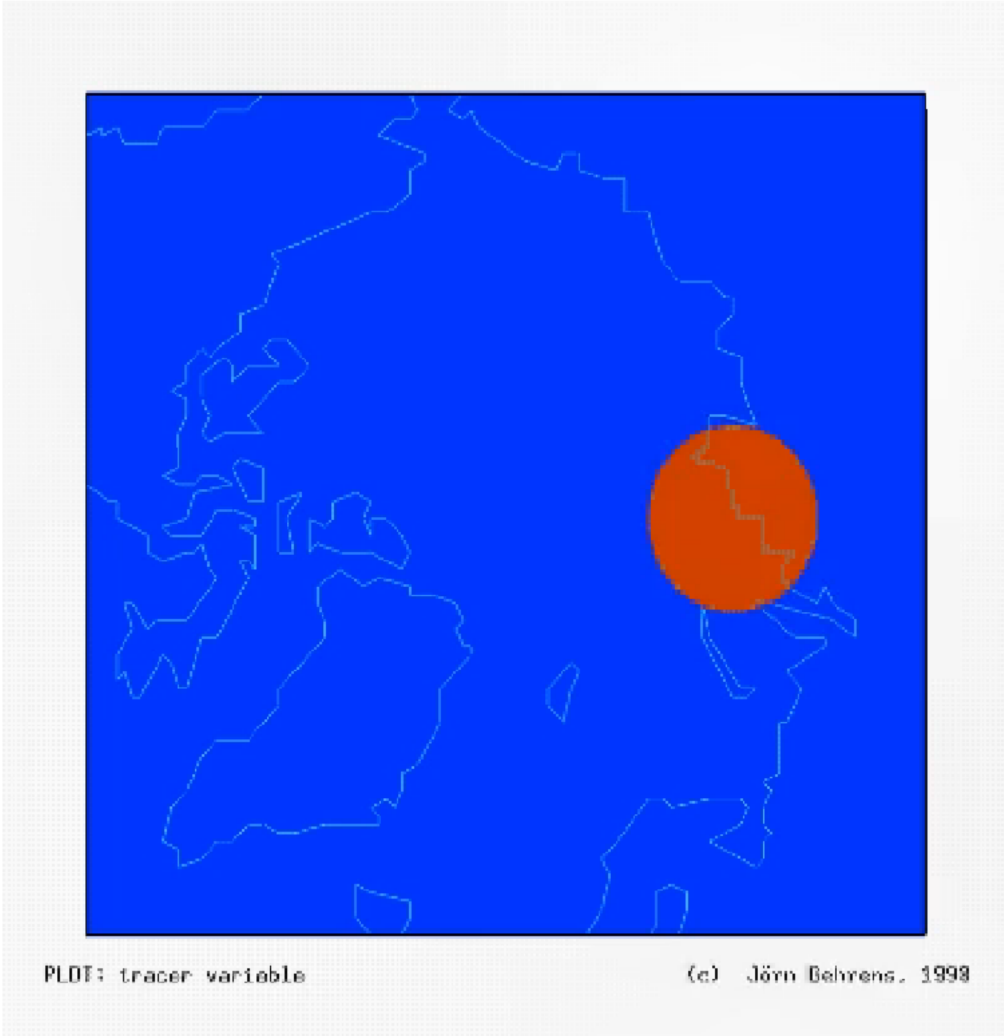
Transport eines ozonarmen Luftpakets

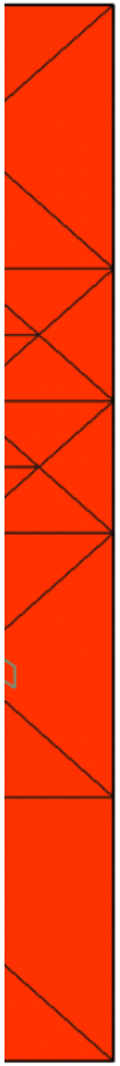


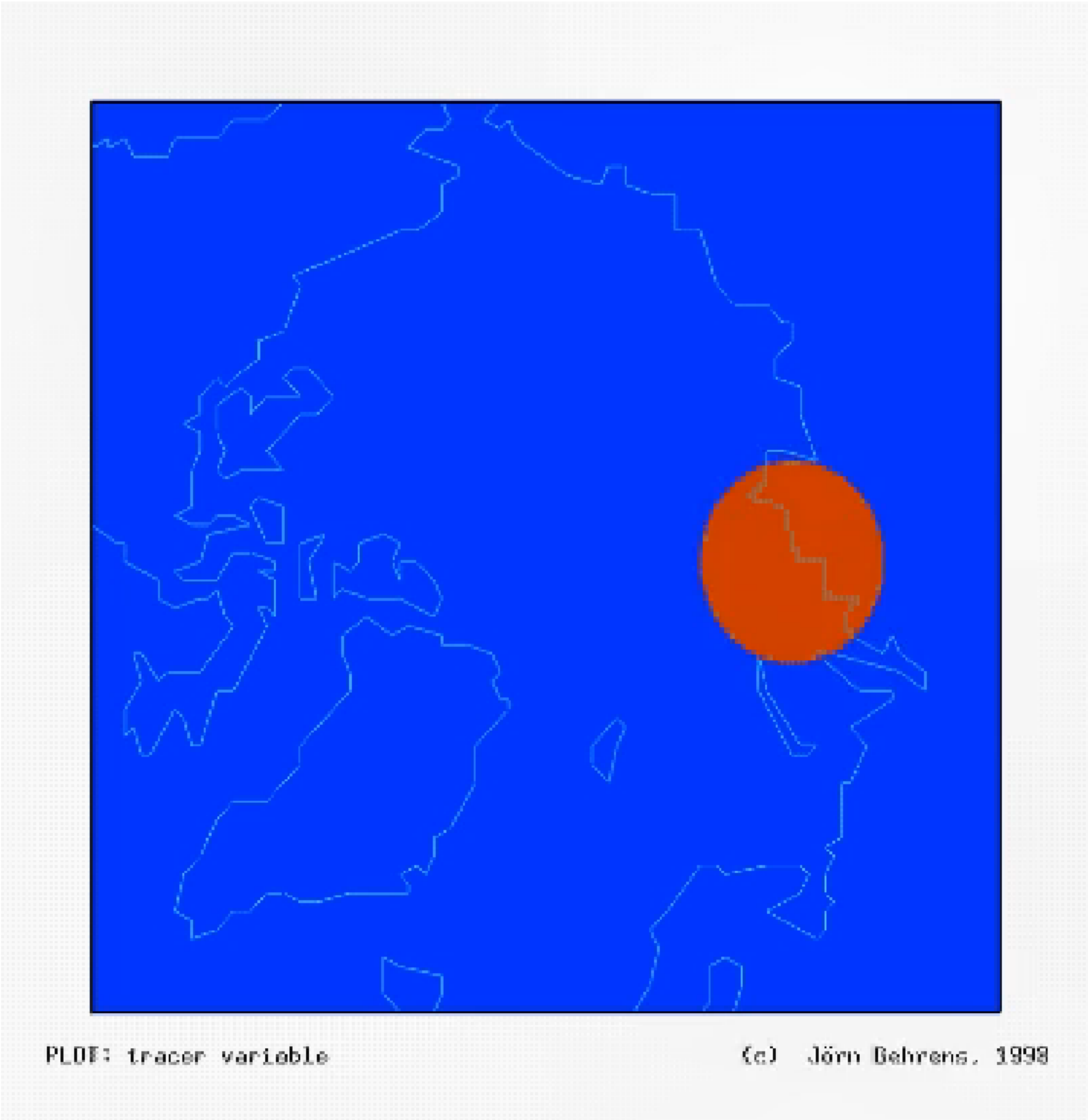


Transport eines ozonarmen Luftpakets







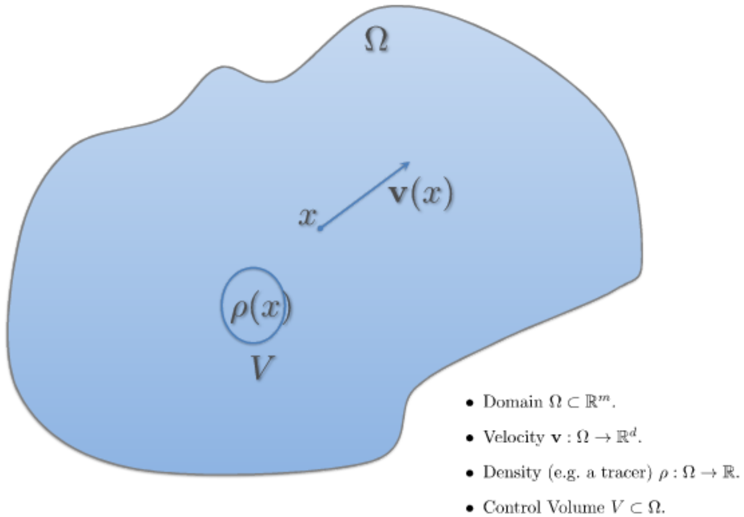

PLOT: tracer variable
(c) Jörn Behrens, 1998

Erhaltungsprinzip

Idee: Leite PDGl aus physikalischem Gesetz (Erhaltung) her!

Masse M im Kontrollvolumen V

$$M = \int_V \rho(x)\ dx$$



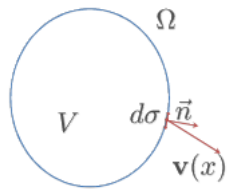
Massenbalance

Massenänderung (infinitesimales Zeitinterval):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_v \rho(x)\ dx\right)\cdot dt$$

Fluss-Rate (über Ränder)

$$\int_{\partial V} \rho \cdot \langle \vec{n}, \mathbf{v} \rangle\ d\sigma dt$$



$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho(x)\ dx = -\int_{\partial V} \rho \cdot \langle \vec{n}, \mathbf{v} \rangle\ d\sigma$$

Kontinuitätsgleichung

Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes:

$$\int_{\partial V} \rho \langle \mathbf{v}, \vec{n} \rangle \; d\sigma = \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \; dx$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho(x) \; dx = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \; dx \quad \text{gilt für alle V}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \rho(x) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0}$$

Variationsprinzip

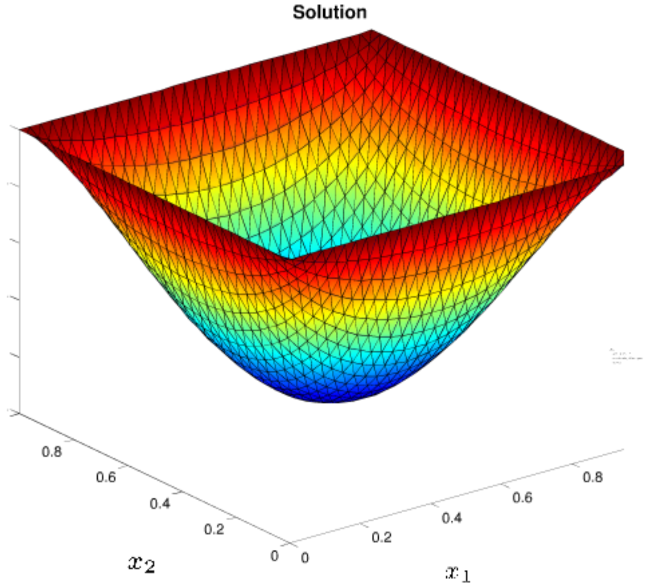
Idee: Leite PDGl aus physikalischem Gesetz (Minimierung) her!

Membran = Minimalfläche

Minimierungsproblem: Minimiere Beugungsenergie

$$J = \int_\Omega \sqrt{1 + \partial_{x_1} u^2 + \partial_{x_2} u^2}\; dx_1 dx_2 \overset{!}{=} \min$$

$$u|_{\partial\Omega} = \phi$$



Herleitung

Für

$$\nabla u = (\partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u) \ll 1,$$

(d.h. ∇u klein), nehmen wir an

$$\sqrt{1 + \partial_{x_1}^2 u + \partial_{x_2}^2 u} \approx 1 + \frac{1}{2}(\partial_{x_1}^2 u + \partial_{x_2}^2 u)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_\Omega (\partial_{x_1} u^2 + \partial_{x_2} u^2)\ dx_1 dx_2 \stackrel{!}{=} \min$$

Poisson Gleichung

Setze: $F(u, \partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u) := \partial_{x_1} u^2 + \partial_{x_2} u^2$

Dann gilt:

Falls $J = \frac{1}{2} \int_\Omega (\partial_{x_1} u^2 + \partial_{x_2} u^2) \; dx_1 dx_2 \overset{!}{=} \min$

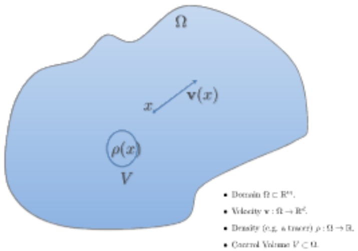
$$\boxed{\Delta u := (\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2) u = 0}$$

Erhaltungsprinzip

Idee: Leite PDGl aus physikalischem Gesetz (Erhaltung) her!

Masse M im Kontrollvolumen V

$$M = \int_V \rho(x) \; dx$$



Variationsprinzip

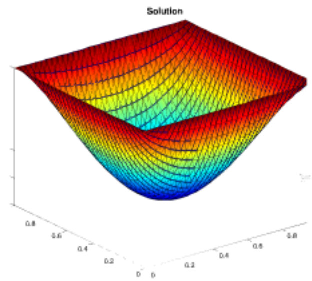
Idee: Leite PDGl aus physikalischem Gesetz (Minimierung) her!

Membran = Minimalfläche

Minimierungsproblem: Minimiere Beugungsenergie

$$J = \int_\Omega \sqrt{1 + \partial_{x_1} u^2 + \partial_{x_2} u^2} \; dx_1 dx_2 \overset{!}{=} \min$$

$$u|_{\partial\Omega} = \phi$$



Notationen und Definitionen

Definition: (Partielle Differentialgleichung)
Eine Gleichung bzw. ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial^p x_1}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial^{p-1} x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial^p x_n}\right) = \mathbf{0}$$

für eine gesuchte Funktion $\mathbf{u} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, heißt ein System partieller Differentialgleichungen (PDG oder PDE) für die m Funktionen $u_1(\mathbf{x}), \dots, u_m(\mathbf{x})$.

Tritt eine der partiellen Ableitungen p-ter Ordnung ($\frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial^{p_1} x_1 \cdots \partial^{p_n} x_n}$) explizit auf, so spricht man von einer PDG der Ordnung p.

Bemerkung: In Anwendungen treten typischerweise (Systeme von) PDG erster und zweiter Ordnung auf.

Bemerkungen

- In Anwendungen treten oft Ortsvariablen auf: $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$. Häufig ist $n = 3$.
- Entsprechend ist häufig eine Zeitvariable ausgezeichnet: $t \in \mathbb{R}$.
- Betrachte dann die allgemeinte PDG in $(n + 1)$ Variablen

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial t^p}\right) = \mathbf{0}.$$

- Differentialoperatoren wie etwa

$$\nabla, \ \mathrm{div}, \ \mathrm{rot}, \Delta$$

beziehen sich dann stets auf die n Ortsvariablen, zum Beispiel

$$\mathrm{div} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}$$
$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Definition: (lineare/nichtlineare PDG)

1. Eine PDG heißt linear, falls $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots)$ affin-linear in den Variablen $\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist.
2. Eine PDG heißt semilinear, falls $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots)$ affin-linear in den Variablen $\frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist und die Koeffizienten nur von $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ abhängen.
3. Eine PDG heißt quasilinear, falls $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots)$ affin-linear in den Variablen $\frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist. Die Koeffizienten können dann von $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^{p-1} \mathbf{u}}{\partial x_n^{p-1}}$ abhängen.
4. In allen anderen Fällen heißt die PDG nichtlinear.

Beispiele:

1. Skalare lineare PDG 1. Ordnung in zwei Variablen:

$$a_1(x, y) u_x + a_2(x, y) u_y + b(x, y) u = c(x, y).$$

2. Skalare quasilinear PDG 1. Ordnung in zwei Variablen:

$$a_1(x, y, u) u_x + a_2(x, y, u) u_y + = g(x, y, u).$$

3. Semilineares System von PDG 2. Ordnung in n Variablen:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1, \dots, x_n) u_{x_i x_j} = b(x_1, \dots, x_n, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{x_1}, \dots, \mathbf{u}_{x_n}).$$

4. Nichtlineare skalier PDG 1. Ordnung in zwei Variablen:

$$(u_x)^2 + (u_y)^2 = f(x, y, u, u_x \cdot u_y).$$

Definition: (Partielle Differentialgleichung)
Eine Gleichung bzw. ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial^p x_1}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial^{p-1} x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial^p x_n}\right) = \mathbf{0}$$

für eine gesuchte Funktion $\mathbf{u} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, heißt ein System partieller Differentialgleichungen (PDG oder PDE) für die m Funktionen $u_1(\mathbf{x}), \ldots, u_m(\mathbf{x})$.

Tritt eine der partiellen Ableitungen p-ter Ordnung $\left(\frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial^{p_1} x_1 \cdots \partial^{p_n} x_n}\right)$ explizit auf, so spricht man von einer PDG der Ordnung p.

Bemerkung: In Anwendungen treten typischerweise (Systeme von) PDG erster und zweiter Ordnung auf.

$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$

Definition: (lineare/nichtlineare PDG)

1. Eine PDG heißt linear, falls $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \ldots)$ affin-linear in den Variablen $\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist.

2. Eine PDG heißt semilinear, falls $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \ldots)$ affin-linear in den Variablen $\frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist und die Koeffizienten nur von $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ abhängen.

3. Eine PDG heißt quasilinear, falls $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \ldots)$ affin-linear in den Variablen $\frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist. Die Koeffizienten können dann von $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^{p-1} \mathbf{u}}{\partial x_n^{p-1}}$ abhängen.

4. In allen anderen Fällen heißt die PDG nichtlinear.

Beispiele:

1. Skalare lineare PDG 1. Ordnung in zwei Variablen:

$$a_1(x,y)u_x + a_2(x,y)u_y + b(x,y)u = c(x,y).$$

2. Skalare quasilinear PDG 1. Ordnung in zwei Variablen:

$$a_1(x,y,u)u_x + a_2(x,y,u)u_y + = g(x,y,u).$$

3. Semilineares System von PDG 2. Ordnung in n Variablen:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1,\dots,x_n)u_{x_i x_j} = b(x_1,\dots,x_n,\mathbf{u},\mathbf{u}_{x_1},\dots,\mathbf{u}_{x_n}).$$

4. Nichtlineare skalier PDG 1. Ordnung in zwei Variablen:

$$(u_x)^2 + (u_y)^2 = f(x,y,u,u_x \cdot u_y).$$

Bemerkungen:

- In Anwendungen treten oft Ortsvariablen auf: $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$. Häufig ist $n = 3$.
- Entsprechend ist häufig eine Zeitvariable ausgezeichnet: $t \in \mathbb{R}$.
- Betrachte dann die allgemeinte PDG in $(n+1)$ Variablen

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial t^p}\right) = \mathbf{0}.$$

- Differentialoperatoren wie etwa

$$\nabla, \ \mathrm{div}, \ \mathrm{rot}, \Delta$$

beziehen sich dann stets auf die n Ortsvariablen, zum Beispiel

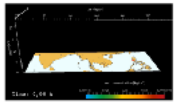
$$\begin{aligned} \mathrm{div} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ \Delta &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \end{aligned}$$

Mathematische Modellierung mit PDG

Reynoldscher Transportsatz

Osborne Reynolds (1842-1912)

Kontinuitätsgleichung



Diffusionsgleichung

Reynoldscher Transportsatz

Vorbemerkungen:
Zur Zeit $t = 0$ nehme eine physikalische Größe ein Gebiet (beschränkte offene Menge) $D_0 \subset \mathbb{R}^n$ ein.
Größen sind beispielsweise *Ladung* (Elektrodynamik) oder *Dichte* (Fluiddynamik).
Die Funktion $\phi(\mathbf{y}, t)$ beschreibe die Veränderung eines Punktes $\mathbf{y}_0 \in D_0$ in der Zeit:

$$\phi : D_0 \times [0, T] \to D_t \subset \mathbb{R}^n, \quad D_t := \{\phi(\mathbf{y}, t) : \mathbf{y} \in D_0\}.$$

Die Trajektorie von $\mathbf{y} \in D_0$ ist die Abbildung

$$\tau : t \mapsto \phi(\mathbf{y}, t) \in D_t$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{y}, t) =: \mathbf{v}(\phi(\mathbf{y}, t), t)$$

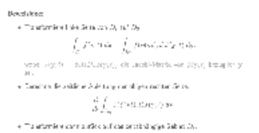
bezeichnet das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}$ der physikalischen Größe.

Osborne Reynolds (1842-1912)

Theorem: (Reynoldscher Transportsatz)
Für eine beliebige differenziertere, skalare Funktion $F : D_t \times [0, T] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{d}{dt}\int_{D_t} f(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x} = \int_{D_t}\left[\frac{\partial}{\partial t} f + \nabla \cdot (f\mathbf{v})\right](\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x}.$$

Erinnere: $\operatorname{div} \mathbf{y} = \nabla \cdot \mathbf{y}$.



Vorbemerkungen:
Zur Zeit $t = 0$ nehme eine physikalische Größe ein Gebiet (beschränkte offene Menge) $D_0 \subset \mathbb{R}^n$ ein.
Größen sind beispielsweise *Ladung* (Elektrodynamik) oder *Dichte* (Fluiddynamik).
Die Funktion $\phi(\mathbf{y}, t)$ beschreibe die Veränderung eines Punktes $\mathbf{y}_0 \in D_0$ in der Zeit:

$$\phi : D_0 \times [0, T] \to D_t \subset \mathbb{R}^n, \quad D_t := \{\phi(\mathbf{y}, t) : \mathbf{y} \in D_0\}.$$

Die Trajektorie von $\mathbf{y} \in D_0$ ist die Abbildung

$$\tau : t \mapsto \phi(\mathbf{y}, t) \in D_t$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{y}, t) =: \mathbf{v}(\phi(\mathbf{y}, t), t)$$

bezeichnet das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}$ der physikalischen Größe.

Beweisidee:

- Transformiere linke Seite von D_t auf D_0:

$$\int_{D_t} f(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x} = \int_{D_0} f(\phi(\mathbf{y}t), t) J(\mathbf{y}, t)\, d\mathbf{y},$$

  wobei $J(\mathbf{y}, t) = \det(D_\mathbf{y}\phi(\mathbf{y}, t))$ die Jacobi-Matrix von $\phi(\mathbf{y}, t)$ bezüglich $\mathbf{y}$ sei.

- Berechne die zeitliche Ableitung der obigen rechten Seite:

$$\frac{d}{dt} \int_{D_0} f(\phi(\mathbf{y}t), t) J(\mathbf{y}, t)\, d\mathbf{y}.$$

- Transformiere dann zurück auf das zeitabhängige Gebiet D_t.

$$\tau : t \mapsto \phi(\mathbf{y}, t) \in D_t$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{y}, t) =: \mathbf{v}(\phi(\mathbf{y}, t), t)$$

bezeichnet das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}$ der physikalischen Größe.

Theorem: (Reynoldscher Transportsatz)
Für eine beliebige differenziertere, skalare Funktion $F : D_t \times [0, T] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{d}{dt}\int_{D_t} f(\mathbf{x}, t)\; d\mathbf{x} = \int_{D_t} \left[\frac{\partial}{\partial t} f + \nabla \cdot (f\mathbf{v})\right](\mathbf{x}, t)\; d\mathbf{x}.$$

Erinnere: $\mathrm{div}\ \mathbf{y} = \nabla \cdot \mathbf{y}$.

Kontinuitätsgleichung

Kontinuitätsgleichung:

- Sei nun $\rho(\mathbf{x}, t)$ die Massendichte einer physikalischen Größe (z.B. Fluiddichte).
- Es gelte ein Erhaltungsprinzip der Form

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho(\mathbf{x}, t) \; d\mathbf{x} = 0.$$

- Nach Reynoldschem Transportsatz gilt dann:

$$\int_{D_t} \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] (\mathbf{x}, t) \; d\mathbf{x} = 0.$$

- Da $D_t \subset \mathbb{R}^n$ beliebige Teilmenge, gilt die PDG (Kontinuitätsgleichung):

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Flussfunktion:

- Schreibe die Kontinuitätsgleichung mit Hilfe einer Flussfunktion $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = 0.$$

- Wir vermeiden *zwei* unbekannte Größen ρ und $\mathbf{q}$ in *einer* Gleichung durch

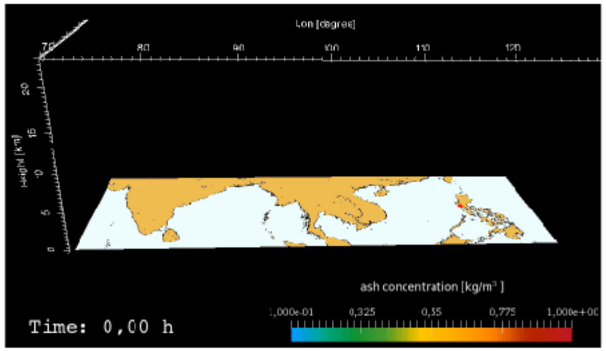
$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{q}(\rho(\mathbf{x}, t), \nabla \rho(\mathbf{x}, t), \ldots).$$

- Beispiel: Der Fluss $\mathbf{q}$ ist proportional zur Dichte ρ, also

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a} \cdot \rho(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n.$$

- Dann erhalten wir die (Transportgleichung):

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \mathbf{a} \cdot \nabla \rho(\mathbf{x}, t) = 0.$$



Kontinuitätsgleichung:

- Sei nun $\rho(\mathbf{x}, t)$ die Massendichte einer physikalischen Größe (z.B. Fluiddichte).
- Es gelte ein Erhaltungsprinzip der Form

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho(\mathbf{x}, t) \; d\mathbf{x} = 0.$$

- Nach Reynoldschem Transportsatz gilt dann:

$$\int_{D_t} \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] (\mathbf{x}, t) \; d\mathbf{x} = 0.$$

- Da $D_t \subset \mathbb{R}^n$ beliebige Teilmenge, gilt die PDG (Kontinuitätsgleichung):

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Flussfunktion:

- Schreibe die Kontinuitätsgleichung mit Hilfe einer Flussfunktion $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = 0.$$

- Wir vermeiden *zwei* unbekannte Größen ρ und $\mathbf{q}$ in *einer* Gleichung durch

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{q}(\rho(\mathbf{x}, t), \nabla\rho(\mathbf{x}, t), \ldots).$$

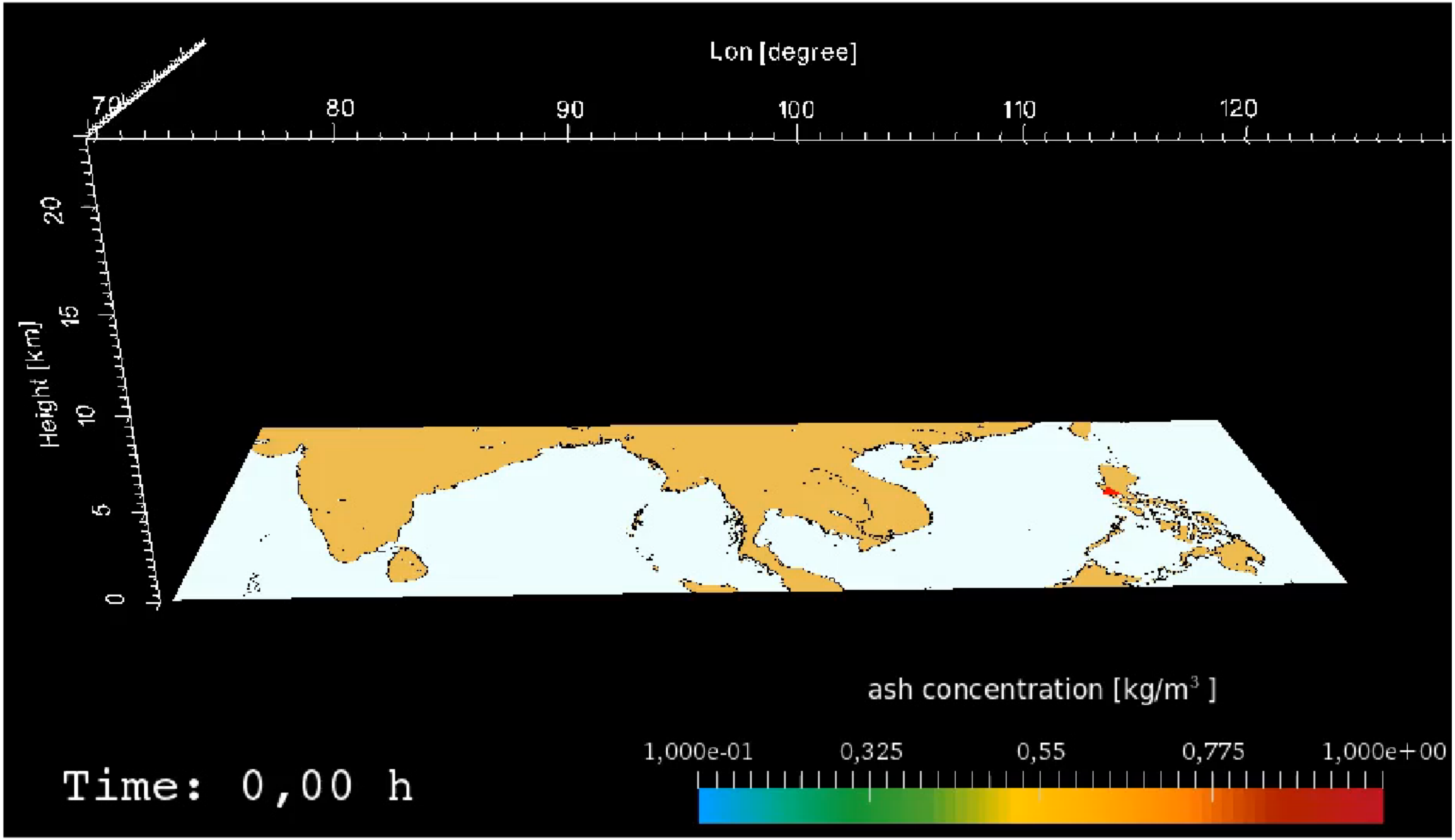
- Beispiel: Der Fluss $\mathbf{q}$ ist proportional zur Dichte ρ, also

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a} \cdot \rho(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n.$$

- Dann erhalten wir die (Transportgleichung):

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{x}, t) + \mathbf{a} \cdot \nabla\rho(\mathbf{x}, t) = 0.$$

110 120



Lon [degree]
70
80
90
100
110
120
Height [km]
0
5
10
15
20
ash concentration [kg/m³]
1,000e-01
0,325
0,55
0,775
1,000e+00
Time: 0,00 h

Diffusionsgleichung

Wärmeleitung oder Diffusion:

- Die Funktion $\rho(\mathbf{x}, t)$ beschreibe nun:
  - chemische Konzentration
  - Temperatur
  - elektro-statisches Potential
- Der Fluss $\mathbf{q}$ sei proportional zum Gradienten von ρ (mit umgekehrtem Vorzeichen):
$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -a\nabla\rho(\mathbf{x}, t), \quad 0 < a \in \mathbb{R}.$$
- Dann folgt:
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (-a\nabla\rho(\mathbf{x}, t)) &= 0 \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{x}, t) &= a\Delta\rho(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$
- Mit $a := 1$ erhalten wir die Wärmeleitungsgleichung (oder Diffusionsgleichung):
$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{x}, t) = \Delta\rho(\mathbf{x}, t).$$

Bemerkung:
Die Abschlussrelation
$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -a\nabla\rho(\mathbf{x}, t)$$
nennt man

- das Ficksche Gesetz der Diffusion,
- das Fouriersche Gesetz der Wärmeleitung, oder
- das Ohmsche Gesetz der elektrischen Ladung.

Beobachtung:
Drei verschiedene physikalische Probleme liefern dieselbe mathematische Gleichung!

Wärmeleitung oder Diffusion:

- Die Funktion $\rho(\mathbf{x}, t)$ beschreibe nun:
  - chemische Konzentration
  - Temperatur
  - elektro-statisches Potential
- Der Fluss $\mathbf{q}$ sei proportional zum Gradienten von ρ (mit umgekehrtem Vorzeichen):
$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -a\nabla\rho(\mathbf{x}, t), \quad 0 < a \in \mathbb{R}.$$
- Dann folgt:
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (-a\nabla\rho(\mathbf{x}, t)) &= 0 \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{x}, t) &= a\Delta\rho(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$
- Mit $a := 1$ erhalten wir die Wärmeleitungsgleichung (oder Diffusionsgleichung):
$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{x}, t) = \Delta\rho(\mathbf{x}, t).$$

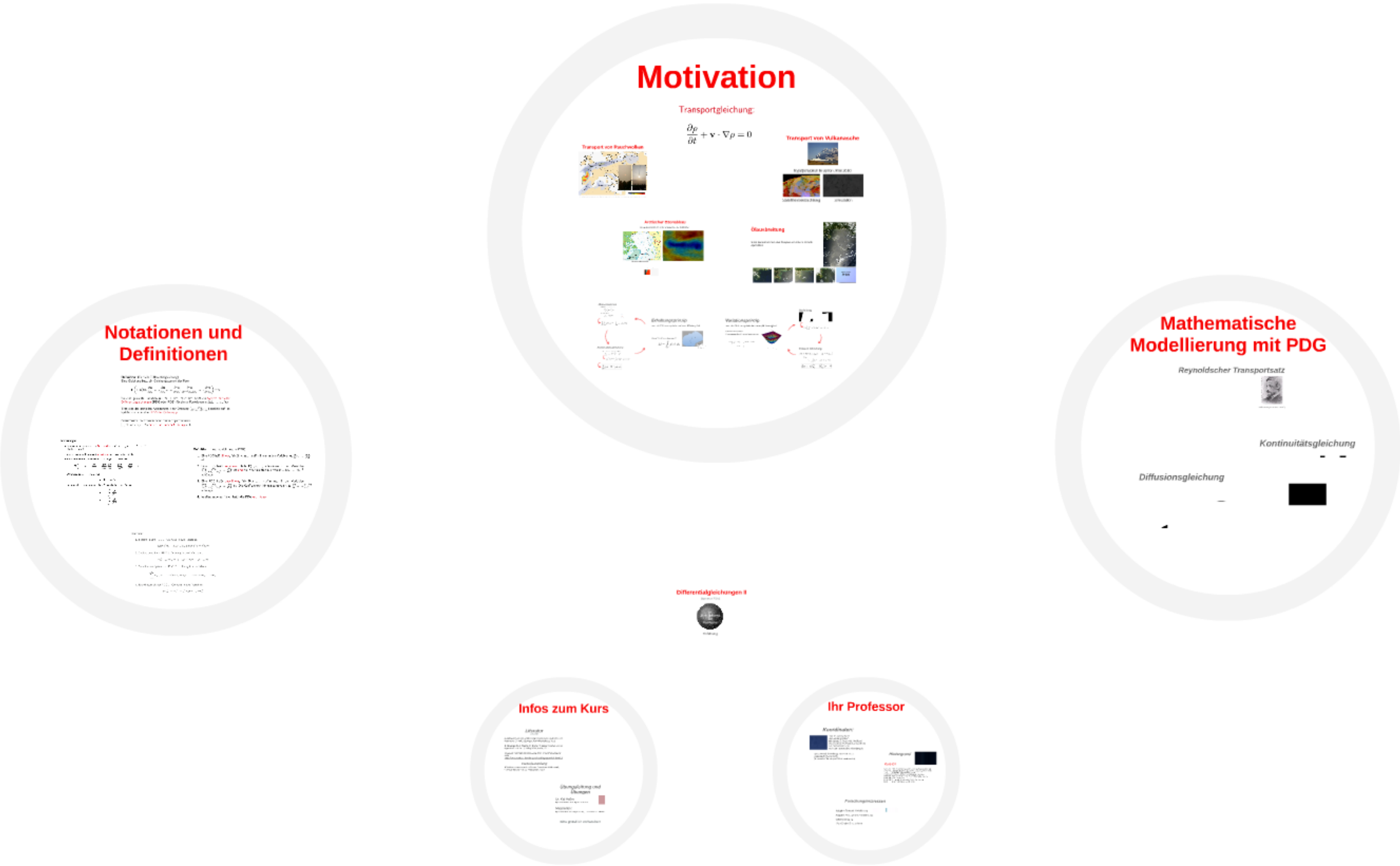
Bemerkung:
Die Abschlussrelation

$$\mathbf{q}(\mathbf{x},t) = -a\nabla\rho(\mathbf{x},t)$$

nennt man

- das Ficksche Gesetz der Diffusion,
- das Fouriersche Gesetz der Wärmeleitung, oder
- das Ohmsche Gesetz der elektrischen Ladung.

Beobachtung:
Drei verschiedene physikalische Probleme liefern dieselbe mathematische Gleichung!


Motivation
Transportgleichung:
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0$
Transport von Rauchwolken
Transport von Vulkanasche
Notationen und Definitionen
Mathematische Modellierung mit PDG
Reynoldscher Transportsatz
Kontinuitätsgleichung
Diffusionsgleichung
Differentialgleichungen II
Infos zum Kurs
Ihr Professor