Hinweis: Lösungsdarstellungen aus dem Produktansatz und von d'Alembert dürfen verwendet werden.

Aufgabe 1: (2+4+4 Punkte)

a) Man bestimme den Typ der folgenden partiellen Differentialgleichungen

(i) $u^2 u_y + 3u = x^2 - 3$,

(ii) $u_{xy}^2 + u_{yy} = e^u$.

b) Man löse die Anfangswertaufgabe $u_x + \frac{3y}{x} u_y = 0$ mit $u(1,y) = 4y$ unter Verwendung der Charakteristikenmethode.

c) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 36 u_{xx}\,, && x \in \mathbb{R}\,, \quad t > 0\,, \\ u(x,0) &= -x\,, && x \in \mathbb{R}\,, \\ u_t(x,0) &= -12 \sin x\,. \end{aligned}$$

(i) Für $(x_0, t_0) = (-3, 1)$ gebe man den Abhängigkeitsbereich der Lösung an.

(ii) Für $x \in [-16, 8]$ zeichne man (Koordinatenachsen, Beschriftung, Skalierung angeben) den Bestimmtheitsbereich der Lösung für $t \geq 0$.

(iii) Man löse das Anfangswertproblem.

Aufgabe 2: (4+6 Punkte)

a) Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= 2u_{xx} \quad \text{für} \quad 0 < x < \pi \quad \text{und} \quad 0 < t\,, \\ u(0,t) &= 0\,, \quad u(\pi, t) = \pi \quad \text{für} \quad 0 \leq t\,, \\ u(x,0) &= x + \sin x \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq \pi\,. \end{aligned}$$

Man bestimme den maximalen Funktionswert der Lösung u und berechne u.

b) Gegeben sei das Dirichlet-Problem im Quadrat

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{für} \quad 0 < x < 1 \quad \text{und} \quad 0 < y < 1\,, \\ u(0,y) &= 0 = u(1,y) \quad \text{für} \quad 0 \leq y \leq 1\,, \\ u(x,0) &= x^2 - x \quad \text{und} \quad u(x,1) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1\,. \end{aligned}$$

Man bestimme den minimalen Funktionswert der Lösung u und berechne u.