Hinweis: Lösungsdarstellungen aus dem Produktansatz und der Burgersgleichung dürfen verwendet werden.

Aufgabe 1: (2+4+4 Punkte)

a) Man schreibe folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung in Matrix-Vektorschreibweise und bestimme den Typ

$$3u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + xu_x - 2u_y = y.$$

b) Gegeben sei das Anfangswertproblem für die Burgers-Gleichung

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T) \quad \text{mit} \quad u(x,0) = 4 - 3x\,.$$

(i) Man bestimme die charakteristischen Grundkurven und zeichne sie (Koordinatenachsen, Beschriftung, Skalierung angeben).

(ii) Man berechne die Lösung des Anfangswertproblems.

(iii) Bis zu welchem Zeitpunkt T existiert die Lösung?

c) Man löse die Anfangsrandwertaufgabe für die Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx}\,, \quad \text{für} \quad 0 < x < 3 \quad \text{und} \quad t > 0, \\ u(0,t) &= 0\,, \quad u(3,t) = 0\,, \quad \text{für} \quad t \ge 0\,, \\ u(x,0) &= \sin(2\pi x)\,, \quad u_t(x,0) = 2\sin(\pi x)\,, \quad \text{für} \quad 0 \le x \le 1\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2: (5+5 Punkte)

a) Für die Anfangsrandwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + (t-2)\sin x \quad \text{für} \quad 0 < x < 2\pi\,, \quad 0 < t\,, \\ u(0,t) &= 0\,,\; u(2\pi,t) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \le t\,, \\ u(x,0) &= 0 \quad \text{für} \quad 0 \le x \le 2\pi \end{aligned}$$

berechne man die Lösung unter Verwendung der Fourier-Methode.

b) Man berechne die Lösung u des folgenden Dirichlet-Problems im Kreisringsektor

$$\begin{aligned} r^2u_{rr} + ru_r + u_{\varphi\varphi} &= 0 \quad \text{für} \quad 1 < r < 2\,, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{3}\,, \\ u(r,0) &= 0\,,\; u\left(r, \frac{\pi}{3}\right) = 0 \quad \text{für} \quad 1 \le r \le 2\,, \\ u(1,\varphi) &= 0\,,\; u(2,\varphi) = 2\sin(3\varphi)\,, \quad \text{für} \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

und bestimme den maximalen Funktionswert von u.