Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 21:

Gegeben sei die folgende Anfangsrandwertaufgabe für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned}u_t &= 3u_{xx} \quad \text{für } 0 < x < \pi, \quad 0 < t, \\u(0, t) &= 1, \quad u(\pi, t) = -1 \quad \text{für } 0 \leq t, \\u(x, 0) &= \cos x \quad \text{für } 0 \leq x \leq \pi.\end{aligned}$$

- Man transformiere das gegebene Problem in u zuerst in ein Problem in v mit homogenen Randbedingungen.
- Man löse das transformierte Problem in v .
Hinweis: Es darf die sich aus dem Produktansatz ergebende Lösungsdarstellung verwendet werden.
- Man gebe die Lösung u an.
- Man bestimme den maximalen Funktionswert von u im zu Grunde liegenden Gebiet $G := [0, \pi] \times [0, \infty[$.

Aufgabe 22:

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung unter Verwendung der Fourier-Methode

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} + (4t + 1) \sin(2x) + \frac{x}{\pi} e^{-t} \quad \text{für } 0 < x < \pi, \quad 0 < t, \\u(x, 0) &= \pi - x \quad \text{für } 0 \leq x \leq \pi, \\u(0, t) &= \pi, \quad u(\pi, t) = 1 - e^{-t} \quad \text{für } 0 \leq t.\end{aligned}$$

Aufgabe 23:

Die Telegraphengleichung $u_{xx} = u_{tt} + 4u_t + 4u$ beschreibt den zeitlichen Verlauf einer Signalspannung u am Ort $x > 0$ in einem langen Übertragungskabel.

Gesucht ist die Signalspannung $u(x, t)$, wenn am Rand $x = 0$ des Übertragungskabels ein periodisches Signal der Form $u(0, t) = \cos(t)$ für $t \geq 0$ eingespeist wird. Außerdem soll die Signalspannung u für $x \rightarrow \infty$ beschränkt sein.

- Man zeige, dass ein Produktansatz der Form $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ zu keiner Lösung führt.
- Man versuche den Lösungsansatz $u(x, t) = u_0 e^{-ax} \cos(t - bx)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

Aufgabe 24:

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 25u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, & t > 0, \\ u(x, 0) &= \sin x, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) &= 1. \end{aligned}$$

- Für den Punkt $(x_0, t_0) = (6, 2)$ gebe man den Abhängigkeitsbereich der Lösung an.
- Für $x \in [-10, 20]$ zeichne man den Bestimmtheitsbereich der Lösung für $t \geq 0$.
- Man löse das Anfangswertaufgabe.

Abgabetermin: 25.6.- 29.6. (zu Beginn der Übung)