

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5

Aufgabe 17:

- a) Man zeige, dass der Laplace-Operator im \mathbb{R}^2 invariant gegenüber Verschiebungen ist, d.h. für die um $(a, b)^T$ verschobenen Koordinaten

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

gilt $u_{xx} + u_{yy} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}$.

- b) Unter Verwendung der Mittelwerteigenschaft berechne man für die Lösung u des Problems

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \quad \text{für} \quad (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 < 4,$$

$$u(x, y, z) = xyz \quad \text{für} \quad (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 4$$

den Wert $u(-1, 2, -3)$.

Aufgabe 18:

Gegeben sei das folgende Dirichlet-Problem im Kreisring $2 < r = \sqrt{x^2 + y^2} < 3$ (in Polarkoordinaten):

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0,$$

$$u(2, \varphi) = \cos \varphi,$$

$$u(3, \varphi) = 1 + \frac{65}{144} \sin(2\varphi).$$

Man berechne die Lösung in Polarkoordinaten, gebe sie in kartesischen Koordinaten an und zeichne sie.

Aufgabe 19:

Man berechne die Lösung des folgenden Dirichlet-Problems im Halbkreis

$$\begin{aligned} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} &= 0 \quad \text{für } 0 < r < 6 \quad \text{und} \quad 0 < \varphi < \pi, \\ u(r, 0) &= 0 \quad \text{und} \quad u(r, \pi) = 0 \quad \text{für } 0 \leq r \leq 6, \\ u(6, \varphi) &= \left| \varphi - \frac{\pi}{2} \right| - \frac{\pi}{2} \quad \text{für } 0 \leq \varphi \leq \pi, \end{aligned}$$

bestimme den maximalen und minimalen Funktionswert von u und zeichne die Lösung.

Aufgabe 20:

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für die folgende Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} && \text{für } 0 < x < 3, \\ & && 0 < t \leq T, \\ u(0, t) &= 0 = u(3, t) && \text{für } 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) &= u_0(x) && \text{für } 0 \leq x \leq 3 \end{aligned}$$

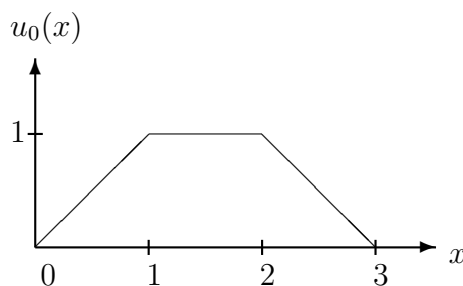


Bild 20 Anfangsfunktion u_0

und bestimme den Maximalwert der Lösung u im Gebiet $[0, 3] \times [0, T]$.

Abgabetermin: 11.6.-15.6. (zu Beginn der Übung)