Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2018**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 13

Man bestimme den Typ der folgenden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und skizziere im $\mathbb{R}^2$ gegebenenfalls die Gebiete unterschiedlichen Typs:

a) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} - 3u_y + x^2 u = 1$,

b) $xu_{xx} + 4u_{xy} + yu_{yy} + (x^2 + y^2)u = 3$,

c) $u_{xx} + 2u_{xz} + 2u_{yy} - u_{zz} + zu_x + xu_y + yu_z - u = 7$.

Aufgabe 14:

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{14}{5}u_{xx} - \frac{4}{5}u_{xy} + \frac{11}{5}u_{yy} + 2\sqrt{5}u_x - \sqrt{5}u_y + 3u = x$$

a) Man bestimme den Typ der Gleichung und

b) transformiere sie auf Normalform.

Aufgabe 15:

a) Man zeige, dass die Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ folgende allgemeine Lösung besitzt:

$$u(x,t) = v(x+ct) + w(x-ct)\,, \quad v, w \in C^2.$$

Tipp: Man transformiere u auf die Koordinaten $\xi = x + ct$ und $\eta = x - ct$ und berechne die allgemeine Lösung der transformierten Differentialgleichung.

b) Man zeige, dass die folgende Randwertaufgabe für die Wellengleichung keine Lösung besitzt.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}\,, & & 0 < x, t < 1 \\ u(x,0) &= x\,, & & 0 \le x \le 1\,, \\ u(x,1) &= 1 + x(x-1)\,, & & \\ u(0,t) &= t\,, & & 0 \le t \le 1\,, \\ u(1,t) &= 1\,. & & \end{aligned}$$

Man überprüfe auch, ob die vorgegebenen Randwerte in den Eckpunkten verträglich sind.

Aufgabe 16:

Man löse die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, \quad 0 < x < 2\pi, \quad 0 < y < \pi, \\ u(x,0) &= 0\,, \quad u(x,\pi) = 0\,, \quad 0 \le x \le 2\pi \\ u(0,y) &= y(\pi - y)\,, \quad u(2\pi, y) = 0\,, \quad 0 \le y \le \pi \end{aligned}$$

durch einen Produktansatz der Form $u(x,y) = f(x) \cdot g(y)$, berechne minimalen und maximalen Funktionswert von u und zeichne die Lösung.

Abgabetermin: 28.5.- 1.6. (zu Beginn der Übung)