2.3 Skalare Erhaltungsgleichungen

Das Cauchy–Problem

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

hat im Allgemeinen keine globale Lösung.

Die Burgers Gleichung aus dem letzten Abschnitt mit der Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \leq 0 \\ 1 - x & : \quad 0 < x < 1 \\ 0 & : \quad x \geq 1 \end{cases}$$

besitzt nur auf dem Zeitintervall $[0, 1)$ die klassische Lösung

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & : \quad x < t \\ (1-x)/(1-t) & : \quad 0 \leq t \leq x < 1 \\ 0 & : \quad x > 1 \end{cases}$$

Was passiert für $t \geq 1$?

Zunächst: Funktionen mit kompaktem Träger

Definition:

Der **Träger einer Funktion** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die Menge

$$\overline{\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \neq 0\}}$$

Ist der Träger einer Funktion kompakt, so sprechen wir von einer **Funktion mit kompaktem Träger**.

Bemerkung:

Es gibt (viele) differenzierbare, ja sogar unendlich oft differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger. Diese spielen in der modernen Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen eine entscheidende Rolle.

Was passiert für $t \geq 1$?

Sei $v : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger.

Multiplizieren wir $u_t + f(u)_x = 0$ mit v und integrieren über $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u_t + f(u)_x)\, v dx dt \\ &= -\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u v_t dx dt - \int_{-\infty}^\infty u_0(x) v(x,0) dx - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u) v_x dx dt \end{aligned}$$

Mit der Anfangsbedingung $u(x, 0) = u_0(x)$ ergibt sich

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u v_t + f(u) v_x)\, dx dt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x) v(x,0) dx = 0$$

Definition:

Eine differenzierbare Funktion $v : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger nennt man auch eine **Testfunktion**.

Definition:

Eine Funktion $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ nennt man eine **Integrallösung** oder **schwache Lösung**, falls die Beziehung

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (uv_t + f(u)v_x)\, dxdt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)v(x, 0)dx = 0$$

für alle Testfunktionen v erfüllt ist.

Bemerkung:

Eine Integrallösung muß **keine** differenzierbare Funktion sein, sondern kann sogar **Sprungstellen** besitzen.

Definition: Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit der unstetigen Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : \quad x \leq 0 \\ u_r & : \quad x > 0 \end{cases}$$

nennt man ein **Riemannproblem** für skalare Erhaltungsgleichungen.

Beispiel: Ein Riemannproblem für die **Burgers Gleichung** lautet

$$\begin{cases} u_t + u u_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit der unstetigen Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : \quad x \leq 0 \\ u_r & : \quad x > 0 \end{cases}$$

Was sind in diesem Fall die Integrallösungen?

1) **Stoßwellenlösung** bei der Burgers Gleichung

Für $u_l \neq u_r$ ist die sogenannte Stoßwelle

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & : \quad x \leq s(t) \\ u_r & : \quad x > s(t) \end{cases}$$

eine Integrallösung.
Dabei bezeichnet die Funktion $s(t)$ die Lage der **Stoßfront**, d.h. der Unstetigkeitsstelle oder Sprungstelle.
Die Stoßfront bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\dot{s}(t)$ wobei

$$\dot{s}(t) = \frac{[f]}{[u]} = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}$$

und $s(0) = 0$ ist.

Diese Beziehung nennt man die **Rankine–Hugoniot Bedingung**.

Was sind in diesem Fall die Integrallösungen?

2) **Verdünnungswelle** bei der Burger's Gleichung

Für $u_l < u_r$ ist die sogenannte Verdünnungswelle eine Integrallösung:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & : \quad x \le u_l\, t \\ \dfrac{x}{t} & : \quad u_l\, t \le x \le u_r\, t \\ u_r & : \quad x \ge u_r\, t \end{cases}$$

Man beachte, dass die Lösung $u(x,t)$ eine **stetige** Funktion ist.

Die Lösung ist entlang der Geraden $x = u_l\, t$ und $x = u_r\, t$ aber **nicht** differenzierbar und daher nur eine Integrallösung.

Bemerkung:

Für $u_l < u_r$ stellt sich die Frage, welche der Lösungen (Stoßwelle oder Verdünnungswelle) physikalisch von Bedeutung ist. Es wird sich zeigen, dass nur die Verdünnungswelle relevant ist.

Beschreibung der Stoßwellenlösung

Definition:

Eine Stoßwellenlösung u ist eine Integrallösung der Erhaltungsgleichung

$$u_t + f(u)_x = 0,$$

wenn eine sogenannte Stoßfront $x = s(t)$, $s \in C^1$ existiert, sodass u jeweils für $x < s(t)$ und $x > s(t)$ eine klassische Lösung der PDE ist und u bei $x = s(t)$ eine Sprungstelle mit Sprunghöhe

$$[u](t) = u(s(t)^+, t) - u(s(t)^-, t)$$

besitzt. Die Größe $\dot{s}(t)$ nennt man die Stoßgeschwindigkeit.

Satz:

Ist $x = s(t)$ die Stoßfront einer Stoßwellenlösung von $u_t + f(u)_x = 0$, so gilt für die Stoßgeschwindigkeit $\dot{s}$ die **Rankine–Hugoniot Bedingung**

$$\dot{s} = \frac{[f]}{[u]} = \frac{f(u(s(t)^-, t)) - f(u(s(t)^+, t)}{u(s(t)^-, t) - u(s(t)^+, t)}$$

Herleitung der Rankine–Hugoniot Bedingung

Eine Integrallösung erfüllt die Beziehung

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u(\xi,t)d\xi = f(u(x_1,t)) - f(u(x_2,t))$$

Wählen wir $x_1 < s(t) < x_2$ so folgt:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{x_1}^{s(t)} u(\xi,t)d\xi + \int_{s(t)}^{x_2} u(\xi,t)d\xi\right) = f(u(x_1,t)) - f(u(x_2,t))$$

Da $u(x,t)$ für $x < s(t)$ und $x > s(t)$ nach Definition eine differenzierbare Lösung ist, können wir unter den beiden Integralen ableiten:

$$\int_{x_1}^{s(t)} \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}\xi + \dot{s}\, u(s(t)^-,t) + \int_{s(t)}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}\xi - \dot{s}\, u(s(t)^+,t) + f_2 - f_1 = 0$$

Also

$$\int_{x_1}^{s(t)} \frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{d}\xi + \dot{s}\, u(s(t)^-, t) + \int_{s(t)}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{d}\xi - \dot{s}\, u(s(t)^+, t) + f_2 - f_1 = 0$$

mit

$$f_1 := f(u(x_1, t)), \qquad f_2 := f(u(x_2, t))$$

Im Grenzfall $x_1 \to s(t)^-$ und $x_2 \to s(t)^+$ verschwinden die Integrale und wir erhalten

$$\dot{s}\, u(s(t)^-, t) - \dot{s}\, u(s(t)^+, t) = f(u(s(t)^-)) - f(u(s(t)^+))$$

Dies ist aber gerade die Rankine–Hugoniot Bedingung in der Form

$$\dot{s} = \frac{[f]}{[u]}$$

Beispiel

Wir betrachten die Burgers Gleichung mit der unstetigen Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : \quad x \leq 0 \\ u_r & : \quad x > 0 \end{cases}$$

und $u_l > u_r$.

Die Rankine–Hugoniot Bedingung lautet

$$\dot{s} = \frac{[f]}{[u]} = \frac{u_l^2/2 - u_r^2/2}{u_l - u_r} = \frac{(u_l - u_r)(u_l + u_r)}{2(u_l - u_r)} = \frac{1}{2}(u_l + u_r)$$

Damit lautet die Stoßwellenlösung dieses Problems

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & : \quad x \leq \frac{1}{2}(u_l + u_r)\, t \\ u_r & : \quad x > \frac{1}{2}(u_l + u_r)\, t \end{cases}$$

Beschreibung der Verdünnungswelle

Wir betrachten das Riemannproblem

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit der unstetigen Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : \quad x \leq 0 \\ u_r & : \quad x > 0 \end{cases}$$

wobei nun $u_l < u_r$ gelte.

Zusätzlich nehmen wir an, dass $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ und $f'' > 0$ gilt, d.h. die Flussfunktion sei **strikt konvex.**

Schließlich setzen wir noch

$$g := (f')^{-1}$$

Nach Annahme ist die Flussfunktion f strikt konvex, d.h. f' ist streng monoton wachsend. Also gilt:

$$u_l < u_r \quad \Rightarrow \quad f'(u_l) < f'(u_r)$$

Es gibt daher **genau zwei** Typen von Charakteristiken, nämlich

$$x(t) = x_0 + f'(u_l)\, t \quad \text{und} \quad x(t) = x_0 + f'(u_r)\, t$$

Diese beiden Kurvenscharen füllen aber **nicht** den ganzen Raum $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ aus, sondern es entsteht ein Bereich Ω, der nicht durchlaufen wird:

$$\Omega := \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \ : \ f'(u_l) \cdot t < x < f'(u_r) \cdot t\}$$

In Ω liefert die Methode der Charakteristiken keine Werte und wir können im Prinzip die Lösung auf Ω mit einer beliebigen **Integrallösung** füllen.

Satz:
Für $u_l < u_r$ ist die **Verdünnungswelle** gegeben durch

$$u(x,t) := \begin{cases} u_l & : \; x < f'(u_l)t \\ g(x/t) & : \; f'(u_l)t < x < f'(u_r)t \\ u_r & : \; x > f'(u_r)t \end{cases}$$

eine Integrallösung des Riemannproblems. Insbesondere ist die Verdünnungswelle eine **stetige** Funktion.

Beweis:

Stetigkeit der Verdünnungswelle: Die kritischen Punkte liegen bei

$$x = f'(u_l)\, t \quad \text{und} \quad x = f'(u_r)\, t$$

Hier gilt

$$g\left(\frac{f'(u_l)\, t}{t}\right) = g(f'(u_l)) = (f')^{-1}(f'(u_l)) = u_l$$

sowie

$$g\left(\frac{f'(u_r)\,t}{t}\right) = g(f'(u_r)) = (f')^{-1}(f'(u_r)) = u_r$$

Weiter ist die Verdünnungswelle konstant für $x < f'(u_l)\,t$ und $x > f'(u_r)\,t$ und löst daher die vorgegebene Erhaltungsgleichung.

Für $f'(u_l)t < x < f'(u_r)t$ berechnet man

$$\begin{aligned} u_t &= -\frac{x}{t^2} g'(x/t) \\ f(u)_x &= f(g(x/t))_x = f'(g(x/t))\frac{g'(x/t)}{t} = \frac{x}{t^2} g'(x/t) \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $g(x/t)$ ebenfalls die Gleichung $u_t + f(u)_x = 0$ löst.

Mit der Stetigkeit folgt daraus, dass die Verdünnungswelle tatsächlich eine Integrallösung ist.

Problem: Integrallösungen sind nicht **eindeutig**!!

Beispiel:

Wir betrachten wieder die Burgers Gleichung mit der Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \le 0 \\ 1 & : \quad x > 0 \end{cases}$$

Dann erhalten wir zum Beispiel die beiden Integrallösungen

$$u_1(x,t) = \begin{cases} 0 & : \quad x \le t/2 \\ 1 & : \quad x > t/2 \end{cases}$$

und

$$u_2(x,t) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 0 \\ x/t & : \quad 0 \le x \le t \\ 1 & : \quad x > t \end{cases}$$

Die erste Lösung repräsentiert eine Stoßwelle, die zweite eine Verdünnungswelle.

Welche der beiden ist die physikalisch richtige Lösung?

Man benötigt eine Zusatzbedingung, die die physikalisch richtige Integrallösung aussucht.

Definition:

Eine Integrallösung heißt **Entropielösung**, falls die Lösung die folgende **Entropiebedingung** (Lax–Oleinik–Bedingung) erfüllt:

$$\exists\, C > 0, \text{ sodass für alle } x, z \in \mathbb{R},\ t > 0 \text{ mit } z > 0 \text{ gilt}$$

$$u(t, x+z) - u(t, x) < \frac{C}{t} z$$

Satz:

Erfüllt eine Integrallösung die oben angegebene Entropiebedingung, so ist diese Lösung eindeutig, d.h. Entropielösungen sind eindeutige Lösungen.