Partielle Differentialgleichungen
TUHH
VL 11, 29. Juni 2017

Poisson Problem - Numerische Lösung mit finiten Elementen

Michael Hinze

Konstruktionsprinzipien für die Basis $b_1, \dots, b_n$ zur Approximation der schwachen Lösung von

$$-\Delta u = f \text{ in } D$$
$$u = 0 \text{ auf } \partial D \qquad (u = g \text{ auf } \partial D)$$

Finde u mit $\int_D \nabla u \nabla v \, dx = \int_D f v \, dx \quad \forall v \in C_0^\infty(D)$

1-1 $\quad u_h = \sum u_i b_i$ mit $\int_D \nabla u_h \nabla b_i \, dx = \int_D f b_i \, dx \quad i = 1, \dots, n \quad \xrightarrow{2} \quad u_1, \dots, u_n$ bestimmen $A \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = F$

(FEM1) $\quad a_{ij} = a(b_j, b_i) = \int_D \nabla b_j \nabla b_i$ soll möglichst häufig verschwinden für $i, j = 1, \dots, n$, d.h. $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ soll sparse (dünn besetzt) sein. Dann können wir A ggf. auch für große n speichern!

(FEM2) $\quad b_i |_{I_k}$ soll möglichst einfache Funktion sein, z.Bsp. ein Polynom l-ten Grades und b_i soll global stetig sein $(i = 1, \dots, n)$.

Dabei $\quad 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1$ Zerlegung mit

$I_k = [x_{k-1}, x_k] \quad k = 1, \dots, n+1.$

Wir hatten gewählt

$$b_i(x_j) = \delta_{ij} \qquad i,j = 0,\dots,n+1$$

$$b_i|_{I_k} \text{ linear} \quad i = 0,\dots,n+1, \quad k = 1,\dots,n+1$$

Wir geben diese Funktionen an:

Hut Funktionen

$$b_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i) \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad i = 1,\dots,n$$

$$b_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, & x \in [x_0, x_1) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$b_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_n}{x_{n+1}-x_n}, & x \in [x_n, x_{n+1}] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Übung: Bestimme

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n, \quad a_{ij} := \int_D b_j' \, b_i' \, dx \qquad (\text{Steifigkeitsmatrix})$$

$$M = (m_{ij})_{ij=1}^n, \quad m_{ij} := \int_D b_j \, b_i \, dx \qquad (\text{Massenmatrix})$$

Achtung: b_i nicht klassisch differenzierbar, $\underbrace{\text{aber schwach differenzierbar}}_{\to \text{ SGL}}$

Hier
$$b_i'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i - x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i) \\ -\frac{1}{x_{i+1}-x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad i = 1,\dots,n, \quad i=0, \ i=n+1 \text{ analog.}$$

schwache Ableitung von b_i (durch stückweises differenzieren erhalten).

Schwache Ableitung meint: κ ist schwache von b_i, falls

$$\int_0^1 \kappa\, v\, dx = -\int_0^1 b_i\, v'\, dx \qquad \forall_{v \in C_0^\infty(0,1)}$$

erfüllt ist. $b_i' := \kappa$ heißt schwache Ableitung von b_i. Bitte mit b_i' von dem nachprüfen!

Was wissen wir über A und M?

Behauptung: A, M sind tridiagonal, d.h. $A, M = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$,

denn $m_{ij} = \int_0^1 b_j b_i\, dx = \int_{\operatorname{supp} b_j \cap \operatorname{supp} b_i} b_j b_i\, dx = 0$, falls $|i-j| > 1$.

Analog $a_{ij} = 0$ für $|i-j| > 1$.

Achtung: mit $u_h(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i b_i(x)$ gilt schon $u_h(0) = 0$, $u_h(1) = 0$,

d.h. unser Ansatz erfüllt automatisch die Randbedingung $u_h(0) = u_h(1) = 0$

Was ist im Fall $u = g$ auf ∂D, hier $u(0) = g_0$, $u(1) = g_1$ mit $g_0, g_1 \neq 0$?

Dann wähle den Ansatz: $u_h(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i b_i(x) + g_0 b_0(x) + g_1 b_{n+1}(x)$

Damit $u_h(0) = 0 + g_0 b_0(0) + 0 = g_0$

und $u_h(1) = 0 + 0 + g_1 b_{n+1}(1) = g_1$, d.h. u_h erfüllt die Randbedingungen.

Zu den Matrizen A und M:

Lösungsmethoden für $AU = F$, $MU = F$

↳ direkte Verfahren in Matlab für moderate Größe von n.

↳ iterative Verfahren $U^{i+1} = C U^i + c$, U^0 gegeben

Matrix mal Vektor

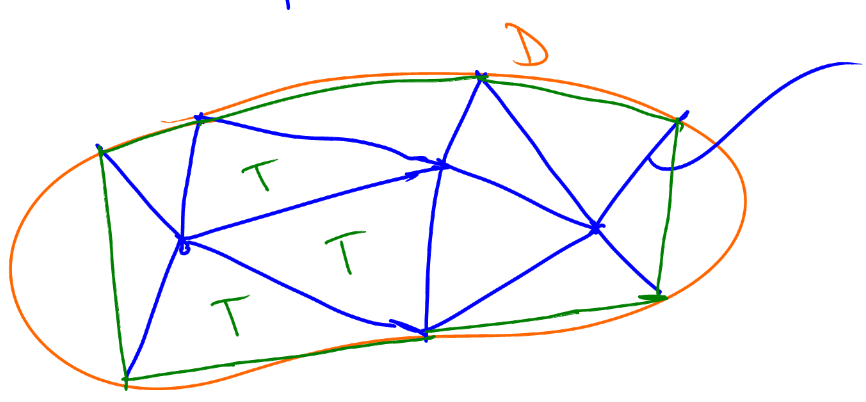
mit C abhängig von A bzw M mit gleicher Besetzungsstruktur

↳ CG-Verfahren (Conjugate Gradient Methods)

↳ Vorkonditionierung und Mehrgitter Methoden

Können diese Konzepte "einfach" auf $D \subset \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ übertragen werden? Ja, mit folgendem Konstruktionsprinzip

$$-\Delta u = f \text{ in } D, \quad u = 0 \text{ auf } \partial D \qquad \int_D \nabla u \nabla v \, dx = \int_D f v \, dx \quad \forall v$$



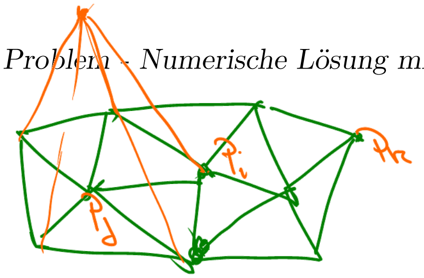
Triangulierung von D

($\hat{=}$ Zerlegung in möglichst kanten-berandete Dreiecke)

unpraktisch, weil dann ∂D einfach beschreibbar sein müsste!

Idee: Ziehe gerade Kanten ein. Dann erhalten wir $D_h = \bigcup T$ und D_h approximiert (hoffentlich) D.

$D_h =$



Globalen Funktionen

$b_i(P_j) = \delta_{ij} \qquad i,j = 1,\dots,n_V$ (n_V = # Punkte P_i)

$b_i|_T$ linear

Dann ist $b_i \in C^0(\bar{D}_h)$. Jetzt gehe vor wie im Fall $n=1$:

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{n_i} u_j b_j(x) + \sum_{j=n_i+1}^{n_V} g(P_j)\, b_j(x) \qquad (\text{falls } u=g \text{ auf } \partial D)$$

Hier: $P_1,\dots,P_{n_i}$ innere Knoten, d.h. $P_1,\dots,P_{n_i} \in D$

$P_{n_i+1},\dots,P_{n_V} \in \partial D$ (Randknoten).

Aus (E $D=D_h$)

$$\int_D \nabla u_h \nabla b_i \, dx = \int_D f b_i \, dx \qquad i = 1,\dots,n_i$$

$$\rightsquigarrow \sum_{j=1}^{n_i} u_j \int_D \nabla b_j \nabla b_i \, dx = \underbrace{\int_D f b_i \, dx}_{F_i} - \overbrace{\sum_{j=n_i+1}^{n_V} g(P_j) \int_D \nabla b_j \nabla b_i \, dx}^{=:G_i} \qquad i=1,\dots,n_i$$

$$\rightsquigarrow A \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n_i} \end{bmatrix} = F + G$$

Damit A sparse, denn $a_{ij} = \int_D \nabla b_j \nabla b_i \neq 0$ nur, falls P_j und P_i Nachbarn sind! D.h. A ist sparse.

Praxis: Erzeuge Zerlegungen derart gestaltet, dass

i.) u mit zunehmender Feinheit der Zerlegung immer besser approximiert wird

ii.) n_V ($\hat{=}$ Mächtigkeit der Basis $b_1, \dots, b_{n_V}$) möglichst klein ist

$\hookrightarrow$ Fragestellung der Gittergenerierung.

Zusatz numerische Lösung Wärmeleitung

$$u_t(t,x) = a^2 \Delta_x (t,x) \quad \text{in } (0,T] \times D$$

$$u(0,x) = u_0(x) \quad x \in D, \qquad u(t,x) = g(t,x) \quad x \in \partial D, \ t \in (0,T]$$

Numerisch: $u(t,x) \approx u_h(t,x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\, b_i(x)$

$$\int_D u_{h,t}(t,x)\, b_j \, dx = a^2 \int_D \nabla_x u_h(t,x) \nabla b_j \, dx$$

u_h einsetzen $\hookrightarrow$

$$M U_t = a^2 A U \quad \text{mit} \quad a_{ij} = \int \nabla b_j \nabla b_i, \quad m_{ij} = \int b_j b_i, \quad U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}$$

$$U(0) = M^{-1} U_0, \qquad U_0^i = \int_D u_0(x)\, b_i(x)\, dx$$

System gew. DGLen der Dimension n.

$\hookrightarrow$ explizit bzw. numerische Lösung möglich, siehe vorl. Semester