Partielle Differentialgleichungen
TUHH
VL 10, 22. Juni 2017

Poisson Problem - Schwache Formulierung und numerische Lösung

Michael Hinze

Ziel: Numerische Lösung der Aufgabe: Zu f und g finde u mit $u=g$ auf $\Gamma := \partial D$ und

$$a(u,v) := \int_D \nabla u \nabla v \, dx = \int_D f v \, dx \quad \forall v \in C_0^\infty(D) \qquad (*)$$

Bsp: Matlab Demo in VL, Sleipner A - Simulationen

Idee: Kodiere u in endlicher Informationsmenge. Dies ist nicht immer möglich, falls u ∞-dimensionales Objekt ist. Aber es geht „näherungsweise" mit einer Funktion u_h etwa in der Form

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i b_i(x)$$

mit Funktionen $b_1, \dots, b_n$. Setze u_h in $(*)$ ein und wähle sukzessive $b_1, \dots, b_n$ als Testfunktionen:

$$a(u_h, b_1) = \int_D f b_1 \, dx \quad \dots \quad a(u_h, b_n) = \int_D f b_n \, dx \quad n \text{ Gleichungen}$$

Gesucht: $u_1, \dots, u_n$.

Es gilt $a(u_h, b_j) = a\left(\sum_{i=1}^{n} u_i b_i, b_j\right) = \underbrace{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} u_i\, a(b_i, b_j)}_{a(b_1,b_j)u_1 + \dots + a(b_n,b_j)u_n}}_{a_{j1} u_1 + \dots + a_{jn} u_n}$ $\quad j = 1, \dots, n$.

D.h. $a(u_h, b_j) = \int_D f b_j \, dx \quad j = 1, \dots, n \quad \Longleftrightarrow$

$$(L) \qquad A \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = F, \quad \text{mit} \quad F_j = \int_D f b_j \, dx \quad \text{und} \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n},$$

$$a_{ij} = a(b_j, b_i) \qquad i, j = 1, \dots, n$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem, das u_h eindeutig bestimmt, falls wir $g \equiv 0$ setzen und verlangen, dass $b_i|_\Gamma = 0$.

$U := (u_1, \dots, u_n)^t$: $\quad (L) \qquad AU = F \qquad$ mit $U \in \mathbb{R}^n$ gesucht.

Hinw.: • A symmetrisch, weil bei uns $a(b_i, b_j) = a(b_j, b_i) \quad \forall i,j = 1, \dots, n$

• A positiv definit, falls $b_1, \dots, b_n$ linear unabhängig sind, also eine Basis von $\operatorname{span}\{b_1, \dots, b_n\}$ bilden

Zu zeigen: $\quad U^t A U > 0 \qquad \forall U \neq 0,\ U \in \mathbb{R}^n$. Dies gilt, weil zu U genau eine Funktion $u_h := \sum_{i=1}^{n} u_i b_i$ gehört

$$U^t A U = \int_D |\nabla u_h(x)|^2 \, dx \quad (= a(u_h, u_h)) \quad \geq 0$$

$= 0$ nur, falls $\nabla u_h = 0$, also $u_h \equiv \text{const}$. Wegen $b_i|_\Gamma = 0$ muss dann $\text{const} \equiv 0$ gelten. Also für $U \neq 0$ gilt $U^t A U > 0$.

Damit ist (L) eindeutig lösbar und u_h damit eindeutig bestimmt

<u>Frage</u>: Wie b_i $(i=1,\dots,n)$ konstruieren bzw wie sehen "gute" Funktionen b_i aus?

<u>Praxis</u>: (L) muss gelöst werden. Das nur dann gut und schnell, wenn A gut konditioniert ist. Dabei

$$\text{cond}(A) := \|A\|\,\|A^{-1}\| \quad \text{mit } \|\cdot\| \text{ Matrixnorm}$$

Worst-case Analyse zeigt

$$A x = b \;\rightsquigarrow\; x$$
$$A \tilde{x} = b + \Delta b \;\rightsquigarrow\; \tilde{x} = x + \Delta x$$

Relativer Fehler

$$\frac{\overbrace{\|x - \tilde{x}\|}^{\Delta x}}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

- Dabei kann $\text{cond}(A)$ bei Wahl von ungeeigneten b_i exponentiell in n wachsen. Numerische Lösung $\tilde{x}$ ist dann schon für moderate $n \in [10, 100]$ nicht mehr zu gebrauchen (bzw nicht berechenbar!)
- A besitzt n^2 Einträge, kann also für moderates $n \geq 10^5$ nicht

mehr im Arbeitsspeicher (eines Laptops) gehalten werden. Idee: konstruiere $b_1,\dots,b_n$ so, dass A möglichst viele Null-Einträge hat, bzw. "sparse" ist.

Konstruktionsprinzip für $D = (0,1)$, d.h. Raumdimension ist 1, und wir betrachten

$$-u'' = f \quad \text{in } (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0$$

Zerlege $[0,1]$ in Teilintervalle mittels des Gitters

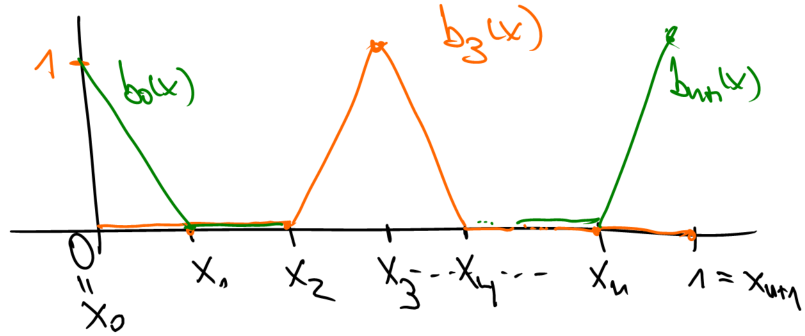
$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1, \quad I_j := [x_{j-1}, x_j] \quad j = 1,\dots,n+1$$

$h := \max\limits_{1 \le j \le n+1} |I_j|$ Gitterweite bzw. Unterteilungsfeinheit.

Konstruiere b_i mit

$$b_i(x_j) = \delta_{ij} \quad i,j = 0,\dots,n+1$$

$$b_i|_{I_k} \text{ linear} \quad i = 0,\dots,n+1, \quad k = 1,\dots,n+1$$



$$\Rightarrow b_i \in C^0([0,1]) \quad i = 0,\dots,n+1$$

Matlab Plots: $-\Delta u = f$, $u = 0$, $f = 10$ $\qquad$ $-\varepsilon \Delta u + u = f = 10$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $u = 0$