Partielle Differentialgleichungen
TUHH
VL 9, 15. Juni 2017

# Poisson Problem - Lösungsdarstellung und schwache Formulierung

Michael Hinze

Eigenschaften harmonischer Funktionen

i.) Mittelwerteigenschaft $\quad u(x_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial K_r(x_0)} u(s)\, d\sigma \quad$ (MWE)

ii) Maximum Prinzip

Sei $u$ auf $\bar{D}$ stetig und harmonisch in $D$, d.h. $\Delta u = 0$ in $D$. Dann nimmt $u$ ihr Max und Min auf $\partial D$ an, d.h. auf dem Rand.

Denn falls nicht, wird Max bei $P_0 \in D$ angenommen. Mit (MWE) folgt dann

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial K_r(P_0)} u(s)\, d\sigma < u(P_0) \qquad u(P_0) = \max u(x)$$

Mit Kreisketteverfahren (siehe Tafel) auf ganz $D$ schließen

Alternativer Nachweis: $P_0 \in D$ mit $u(P_0) = \max_{x \in \bar{D}} u(x)$. Dann wegen $u \in C^2(D) \cap C^0(\bar{D})$: $\nabla u(P_0) = 0$ und Hess $u(P_0)$ negativ semidefinit siehe Analysis II. Dann $\operatorname{diag}(\operatorname{Hess} u(P_0)) \leq 0$, also $\underbrace{\operatorname{spur}(\operatorname{Hess} u(P_0))}_{= \Delta u(P_0)} \leq 0$ ↯

Ist $P_0$ echt maximal $\rightarrow$ $\operatorname{diag}(\operatorname{Hess} u(P_0)) < 0 \rightarrow$ ↯.

Minimum: argumentiere analog.

<u>Folgerung</u>. Das Poisson Problem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } D$$
$$u = g \quad \text{auf } \partial D$$

ist, falls lösbar, eindeutig lösbar. Dabei $f \in C^2(D)$, $g \in C^0(\partial D)$, denn $u_1 \neq u_2$ Lösungen, so löst $w := u_1 - u_2$ das Laplace Problem

$$\left.\begin{aligned} \Delta w &= 0 \quad \text{in } D \\ w &= 0 \quad \text{auf } \partial D \end{aligned}\right| \xrightarrow[\text{Prinzip}]{\text{Max}} w \equiv 0 \text{ auf } \bar{D} \Rightarrow u_1 = u_2 \text{ auf } \bar{D}.$$

<u>Bemerkung</u>: Analoge Eigenschaften können gelten für Lösungen von $(Lu)(x) := -\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) + b^t(x)\nabla u(x) + c(x)u(x) = f(x)$ in $D$,

$$u(x) = g(x) \quad \text{auf } \partial D$$

hergeleitet werden. $A(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b(x) \in \mathbb{R}^n$, $c(x) \in \mathbb{R}$ $\rightarrow$ SgL

Lösungsdarstellung mit Hilfe der Green'schen Funktion

siehe Folien Gassner 79 ff

Schwache Formulierung des Poisson-Problems

Grund: In

$$(P) \quad \begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } D \\ u &= g \quad \text{auf } \partial D \end{aligned}$$

oder $\partial_\nu u = g$ auf $D$ Neumann RB

oder $\partial_\nu u + \kappa u = g$ auf $D$ Robin

sollen auch unstetige Daten $f$ und/oder $g$ zulässig sein. Dann können wir nicht erwarten, dass $u \in C^2(D) \cap C^0(\bar{D})$ ist und (P) sinnvoll hingeschrieben werden kann!

Formale Herleitung der schwachen Form für das Dirichlet Problem

$$\int_D -\Delta u\, v \, dx = \int_D f v \, dx \quad \forall_v, \; v \text{ geeignete Funktion}$$

$$\| $$

$$\int_D \nabla u \nabla v \, dx - \int_{\partial D} \partial_\nu u \underbrace{v}_{=0} \, d\sigma,$$

z.Bsp. $v \in C_0^\infty(D)$

$\| $

$\{ v \in C^\infty(D), \; \underbrace{\operatorname{supp} v}_{\overline{\{x \in D;\, v(x) \neq 0\}}} \subset\subset D \}$

kompakt enthalten

d.h.

$$\int_D \nabla u \nabla v \, dx = \int_D f v \, dx \quad \forall_v$$

Schwache Form des Poisson Problems mit Dirichlet Randwerten lautet: Finde zu $g$ und $f$ ein $u$ mit $u_{|\partial D} = g$ und

$$\int_D \nabla u \nabla v \, dx = \int_D f v \, dx \quad \forall_{v \in C_0^\infty(D)}$$

<u>Merke</u>: Die Testfunktionen $v$ müssen dort Null sein, wo $u$ fix vorgegeben ist, also hier auf $\partial D$ $\Rightarrow$ $v \in C_0^\infty(D)$.

Schwache Form für das Neumann-Problem:

Zu $f$ und $g$ finde $u$ mit

$\partial_\nu u = g$ auf $\partial D$ !

$$\int_D \nabla u \nabla v \, dx = \int_D f v \, dx + \int_{\partial D} g v \, d\sigma \qquad \forall v \in C^\infty(D) \cap C^1(\bar{D})$$

SgL: Schwache Form mit Robin Randbedingungen

<u>Ziel</u>: Numerische Approximation von (schwachen) Lösungen des Poisson Problems

Setze: $$a(u,v) = \int_D \nabla u \nabla v \, dx .$$

Damit ist Dirichlet äquivalent zu: Finde $u$ mit $u = g$ auf $\partial D$ und

$$a(u,v) = \int_D f v \, dx \qquad \forall v$$

<u>Idee</u>: Approximiere $u$ mittels $u_h(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i \, b_i(x)$ (Ansatz) mit bekannten Funktionen $b_i$. Gesucht $u_1, \dots, u_n$