Partielle Differentialgleichungen
TUHH
VL 8, 1. Juni 2017

Laplace Gleichung, Poisson Problem

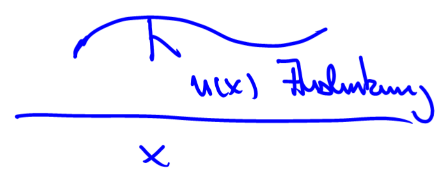
Michael Hinze

Motivation

i) Banjo-Trommel

Trommeln $\hat{=}$ auslenken

Membran $\hat{=}$ Graph über $\Omega \subset \mathbb{R}^2$



Energie der Membran

$$\int_\Omega \frac{1}{2} A(x)\nabla u(x)\cdot\nabla u(x) \underbrace{- f(x)\,u(x)}_{\text{Potentielle Energie}}\,dx =: J(u) \qquad A(x) = \operatorname{diag}(a(x), b(x)) \text{ Elastizitäts-tensor}$$

Spanne Membran auf $\partial\Omega$ ein: $u(x) = g \; (\equiv 0)$ auf $\partial\Omega$

Finde u^* mit

(1) $$J(u^*) \le J(u) \quad \forall_u \text{ mit } u_{|\partial\Omega} = 0 \qquad u^* \text{ Energie-minimal}$$

Charakterisiere u^*: $g(\varepsilon) := J(u^* + \varepsilon v)$ mit $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und $v_{|\partial\Omega} = 0$

(1) $$\Longrightarrow 0 = g'(0) = \frac{d}{d\varepsilon} J(u^* + \varepsilon v)\Big|_{\varepsilon=0} \overset{u=u^*}{=} \frac{d}{d\varepsilon} \int_\Omega \frac{1}{2} A \nabla(u+\varepsilon v)\cdot\nabla(u+\varepsilon v) - f(u+\varepsilon v)\,dx\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= \int_\Omega A\nabla u \nabla v - f v \, dx = 0 \quad \forall v \text{ mit } v_{|\partial\Omega} = 0$$

$$\|$$

Gauß $\Longrightarrow$

$$\int_\Omega -\operatorname{div}(A\nabla u)\, v \, dx + \int_{\partial\Omega} (A\nabla u)\cdot \nu \underbrace{v}_{=0} \, d\sigma - \int_\Omega f v \, dx$$

$$\Longleftrightarrow \int_\Omega \big(-\operatorname{div}(A\nabla u) - f\big) v \, dx = 0 \quad \forall v \text{ mit } v_{|\partial\Omega} = 0 \text{ und zBsp } v \in C^1(\bar{\Omega})$$

$$\longrightarrow \quad (P) \quad \begin{aligned} -\operatorname{div}(A\nabla u) &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

Partielle Differentialgleichung

Energieminimale Zustand u erfüllt notwendig (P)

(P) heißt Euler-Lagrange Gleichung von $\min J(v)$ mit J wie oben.

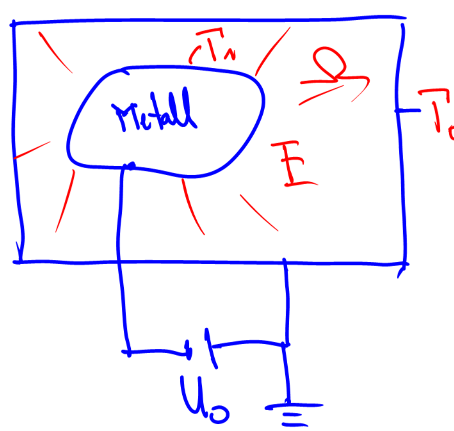
Sei $A(x) = \alpha(x)\, Id$ und OE $\alpha \equiv 1$. Dann ist (P)

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

Poisson Problem

ii) Elektrische Felder modellieren

E elektrisches Feld



$$J(E) = \int_\Omega \tfrac{1}{2} \varepsilon(x) E(x) \cdot E(x) \, dx$$

ε Dielektrizitätstensor

$E(x) = -\nabla u(x)$ (E ist Gradient eines Potentials)

Damit

$$J(E) = J(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}\, \varepsilon(x) \nabla u(x) \nabla u(x)\, dx \to \min$$

unter allen u mit $u_{|\Gamma_0} = 0$, $u_{|\Gamma_1} = U_0$

u minimal $\rightarrow$

$$-\operatorname{div}(\varepsilon(x) \nabla u(x)) = 0 \text{ in } \Omega$$
$$u(x) = 0 \text{ auf } \Gamma_0$$
$$u(x) = U_0 \text{ auf } \Gamma_1$$

Euler-Lagrange Gleichungen für J wie oben

$\varepsilon(x) = \mathrm{Id}$:

$$-\Delta u = 0 \text{ in } \Omega$$
$$u = 0 \text{ auf } \Gamma_0$$
$$u = U_0 \text{ auf } \Gamma_1$$

Laplace Gleichung

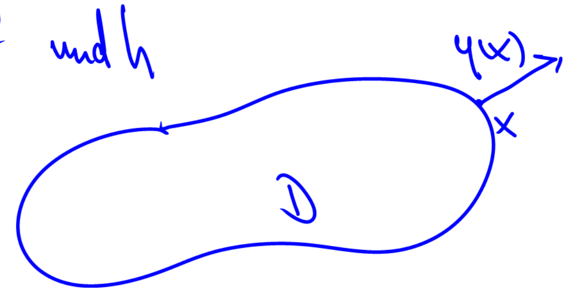
Begriffe: $\overbrace{\text{Randwertaufgabe}}^{\text{RWA}}$ für das Poisson Problem im offenen Gebiet D lautet

$$-\Delta u(x) = f(x) \text{ in } D$$
$$u(x) = g(x) \text{ auf } \partial D$$

Dirichlet-RWA mit Daten f und g

$$-\Delta u(x) = f(x) \text{ in } D$$
$$\partial_\nu u(x) = h(x) \text{ auf } \partial\Omega$$

Neumann-RWA mit Daten f und h



mit $\partial_\nu u(x) = \nabla u(x) \cdot \nu(x)$

<u>Beachte</u>: Bei der Neumann-RWA müssen f und h kompatibel sein, denn Integration liefert mit Gauß

$$\underbrace{\int_D -\Delta u(x)\,dx}_{\int_D f(x)\,dx} \overset{\text{Gauß}}{=} \underbrace{-\int_{\partial D} \partial_\nu u(s)\,d\sigma}_{\int_{\partial D} -h(s)\,d\sigma}$$

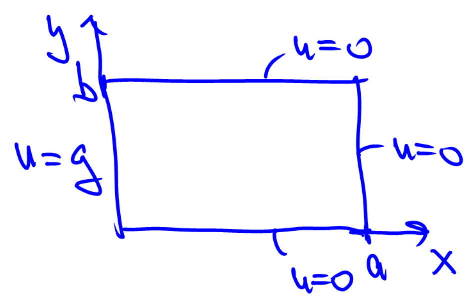
d.h. $\int_D f(x)\,dx = \int_{\partial D} h(s)\,d\sigma$ muß erfüllt sein.

Spezielle Lösungen der Laplace Gleichung $(x,y) \in [0,a] \times [0,b]$

$$\Delta u(x,y) = 0 \quad \text{in } (0,a)\times(0,b)$$

$$u(x,0) = u(x,b) = 0 \qquad 0 \le x \le a$$

$$u(0,y) = g(y),\ u(a,y) = 0 \qquad 0 \le y \le b$$



a) <u>Separationsansatz</u>: $u(x,y) = X(x)\,Y(y)$ in Laplace Gleichung liefert

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} \equiv \text{const} := \alpha^2$$

mit $\underbrace{Y(0) = Y(b) = 0}$ und $X(0) = g(y)$, $X(a) = 0$

$\rightarrow$ Eigenwertproblem für Y mit Lösung $Y_k(y) = C_k \sin(\alpha_k y)$
mit $\alpha_k = \frac{k\pi}{b}$

Für X erhalten wir zu α_k Lösungen

$$X_k(x) = D_k \sinh(\alpha_k(x-a)) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Superposition: $u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sinh(\alpha_k(x-a)) \sin(\alpha_k y)$

Argumentation wie bei Wellengleichung

$$g(y) = u(0,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{b_k \sinh(-\alpha_k a)}_{=:\beta_k} \sin(\alpha_k y)$$

mit $\beta_k = \frac{2}{b}\int_0^b g(y)\sin(\alpha_k y)\,dy$, falls g $2b$-periodisch ungerade fortgesetzt wird.

b) Fundamentallösungen der Laplace Gleichung

$$\Delta u = 0 \quad \text{im } \mathbb{R}^n$$

Wie sehen Lösungen aus?

Finde Lösung der Form $u(x) = v(r(x))$ (radialsym. Lösung)

mit $r(x) = |x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

v erfüllt eine gewöhnliche Differentialgleichung, denn mit

$$u_{x_i} = v'(r)\, r_{x_i} = v'(r)\frac{x_i}{r}$$

$$u_{x_i x_i} = v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right)$$

$$\Longrightarrow \Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}(x) = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) \overset{!}{=} 0$$

$$\Longrightarrow \quad v(r) = \begin{cases} -b \log r + c & n=2 \\ \dfrac{b}{r^{n-2}} + c & n \geq 3 \end{cases} \quad \text{mit Konstanten } b \,\&\, c.$$

<u>Def. 1</u>

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log|x| & n=2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} |x|^{2-n} & n \geq 0 \end{cases} \qquad \frac{1}{4\pi}|x|^{-1} \ (n=3)$$

heißt Fundamentallösung der Laplace Gleichung mit $\alpha(n)$ = Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$

<u>Def.</u>: Sei u Lösung der Laplace Gleichung, d.h. erfülle

$\Delta u = 0$, dann heißt u harmonisch.

Bsp: $f(z) = u(z) + i v(z)$ analytisch $\longrightarrow$ u, v harmonisch
$\hookrightarrow$ Kompl. Funktionen

<u>Ziel</u>: $u \in C^2(D) \cap C^0(\bar{D})$. Stelle u dar mit Hilfe ihrer Randwerte auf ∂D und des Laplaceoperators

Sei $x_0 \in D$, $r(x) = |x|$, <u>$n=3$</u>, d.h. $D \subset \mathbb{R}^3$

$$u(x_0) \overset{!}{=} \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \frac{1}{r} \partial_\nu u - u \partial_\nu \left(\frac{1}{r}\right) d\sigma - \int_D \frac{1}{r} \Delta u \, dx \qquad (3)$$

$$= \int_{\partial D} \Phi \partial_\nu u - u \partial_\nu \Phi \, d\sigma - \int_D \Phi \Delta u \, dx, \quad \Phi \text{ Fundamentallsg.}$$

Nachweis: im Bärwolff Kap 9

Was bleibt in (3) übrig, wenn u harmonisch ist in D?

Dazu sei $D = K_{r_0}(x_0)$, $r_0 > 0$ fix

Es gilt

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi r_0^2} \int_{\partial K_{r_0}(x_0)} u(s)\, d\sigma$$

Mittelwert-Eigenschaft harmonischer Funktionen

<u>Nachweis</u>: $\partial_\gamma \left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{\partial K_{r_0}(x_0)} = -\frac{1}{r_0^2}$ und

$$\int_{\partial K_{r_0}(x_0)} \frac{1}{r}\, \partial_\gamma u\, d\sigma = \frac{1}{r_0} \int_{\partial K_{r_0}(x_0)} \partial_\gamma u\, d\sigma \overset{\text{Gauß}}{=} \frac{1}{r_0} \int_{K_{r_0}(x_0)} \Delta u\, dx = 0$$

$$\overset{(3)}{\Longrightarrow} \boxed{u(x_0) = \frac{1}{4\pi r_0} \int_{\partial K_{r_0}(x_0)} u(s)\, d\sigma}$$