Partielle Differentialgleichungen
TUHH
VL 5, 4. Mai 2017

Wellengleichung

Michael Hinze

Örtlich eindimensionale Wellengleichung (u Auslenkung einer gezupften Saite)

$$u_{tt}(t,x) - c^2 u_{xx}(t,x) = 0 \quad \text{für } (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$$
$$u(0,x) = f(x)$$
$$u_t(0,x) = g(x)$$

mit $c > 0$ "Ausbreitungsgeschwindigkeit" der Welle

Lösungsstruktur: $\xi := x + ct, \quad \eta := x - ct$

$$\rightarrow \quad x = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \quad t = \frac{1}{2c}(\xi - \eta)$$

Schreibe Lösung $u(t,x)$ in ξ, η: $u(t,x) = u\left(\frac{1}{2c}(\xi - \eta), \frac{1}{2}(\xi + \eta)\right) =: v(\xi, \eta)$

Erfüllt u die Wellengleichung, erhalten wir

$$v_\xi(\xi,\eta) = \frac{1}{2c} u_t + \frac{1}{2} u_x$$

$$v_{\xi\eta}(\xi,\eta) = \frac{1}{4} u_{xx} - \cancel{\frac{1}{4c} u_{xt}} + \cancel{\frac{1}{4c} u_{tx}} - \frac{1}{4c^2} u_{tt} = \frac{1}{4}\left(u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt}\right) = 0$$

$$\rightarrow \quad v(\xi,\eta) = \phi(\xi) + \chi(\eta)$$

Damit ergibt sich für u:

$$u(t,x) = v(\xi,\eta) = \phi(\overset{\xi}{x+c_1 t}) + \chi(\overset{\eta}{x-c_1 t}) \qquad (*)$$

Baue Anfangswerte ein:

$$u(0,x) = \phi(x) + \chi(x) \overset{!}{=} f(x) \qquad (1)$$

$$u_t(0,x) = c_1\left[\phi'(x) - \chi'(x)\right] \overset{!}{=} g(x) \qquad (2)$$

$$(2) \overset{x_0 \in \mathbb{R}}{\Longrightarrow} \quad \phi(x) - \chi(x) = \frac{1}{c_1}\int_{x_0}^{x} g(z)\,dz + \frac{1}{c_1}\left(\phi(x_0) - \chi(x_0)\right) \qquad (2)'$$

$$\Longrightarrow \quad (2)' + (1) = 2\,\phi(x) = f(x) + \frac{1}{c_1}\int_{x_0}^{x} g(z)\,dz + \frac{1}{c_1}\left(\phi(x_0) - \chi(x_0)\right)$$

$$(1) - (2)' = 2\,\chi(x) = f(x) - \frac{1}{c_1}\int_{x_0}^{x} g(z)\,dz - \frac{1}{c_1}\left(\phi(x_0) - \chi(x_0)\right)$$

Einsetzen in $(*)$ ergibt

Lösungsdarstellung nach d'Alembert

$$u(t,x) = \phi(x+c_1t) + \chi(x-c_1t)$$

$$= \frac{1}{2}\left[f(x+c_1t) + f(x-c_1t) + \frac{1}{c_1}\int_{x-c_1t}^{x+c_1t} g(z)\,dz \right]$$

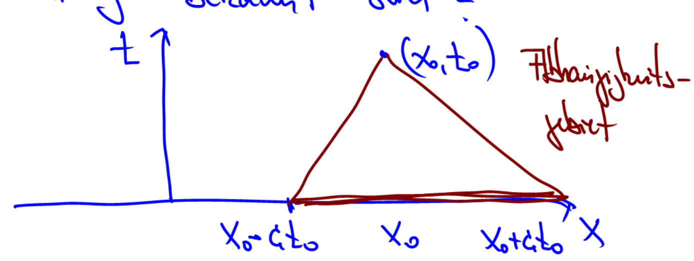
Lösungsdarstellung

Lösungsdarstellung liefert Aussagen zu Bestimmtheits- und Abhängigkeitsgebiet der Lösung;

i) (t_0, x_0) geg., bestimme $u(t_0, x_0)$.

Für welche x-Werte müssen f und g bekannt sein?

d.h. f, g müssen auf $[x_0 - c_1t_0,\ x_0 + c_1t_0]$ bekannt sein.

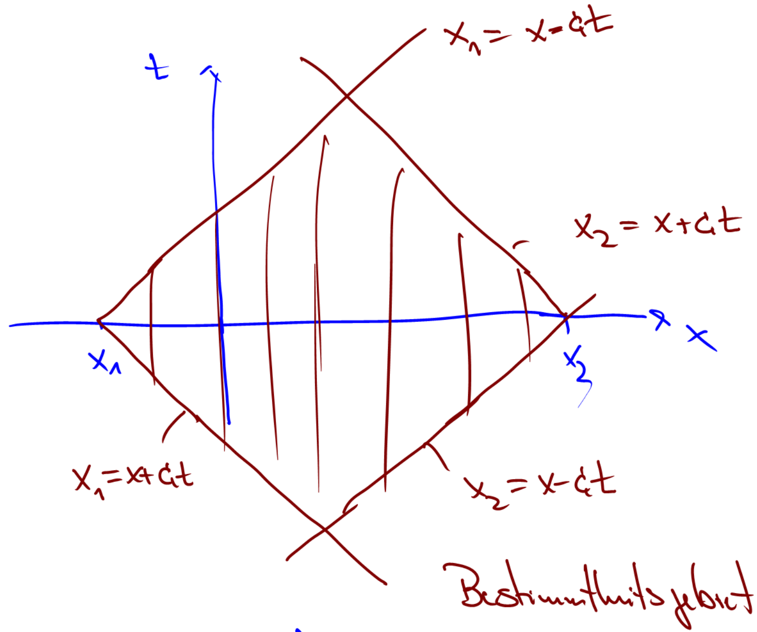


ii) Seien f, g auf $[x_1, x_2]$ gegeben. Wo kennen wir dann u?

Dann u im Parallelogramm

$$x_1 \le x + c_1 t \le x_2$$
$$x_1 \le x - c_1 t \le x_2$$

bekannt



$\rightarrow$ problematisch, falls eingespannte Saite modelliert wird, weil dann etwa $x_1 = 0$, $x_2 = \ell$ (Länge der Saite) und Lösung nicht für alle Zeiten dargestellt wird.

iii) Wie wirken sich "Störungen" in den Daten f und g auf die Lösung aus?

Sei u Lösung zu f, g, $\quad \tilde{u}$ Lösung zu $\tilde{f}, \tilde{g}$

$$|u(t,x) - \tilde{u}(t,x)| \le \text{" } f - \tilde{f},\ g - \tilde{g} \text{ "}$$

Hier $\quad |u(t,x) - \tilde{u}(t,x)| \le \frac{1}{2} | f(x+c_1t) - \tilde{f}(x+c_1t)| + \frac{1}{2} | f(x-c_1t) - \tilde{f}(x-c_1t)|$

$$+ \frac{1}{2c_1} \int_{x-c_1t}^{x+c_1t} |g(z) - \tilde{g}(z)|\, dz$$

$$\le \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - \tilde{f}(x)| + \frac{1}{2c_1} \max_{x\in\mathbb{R}} |g(x) - \tilde{g}(x)| \underbrace{\int_{x-c_1t}^{x+c_1t} dz}_{2c_1t}$$

$$\le \|f - \tilde{f}\|_{\infty,\mathbb{R}} + t\, \|g - \tilde{g}\|_{\infty,\mathbb{R}} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Damit $\quad \| u-\tilde{u}\|_{\infty,[0,T]\times\mathbb{R}} \le \|f-\tilde{f}\|_{\infty,\mathbb{R}} + T\|g-\tilde{g}\|_{\infty,\mathbb{R}}$

D.h. für endliche Zeit $t \le T$, $T\in\mathbb{R}$ hängt die Lösung u stetig von den Daten ab!

Anfangs-Randwertproblem für die Wellengleichung (eingespannte Saite)

$$u_{tt}(t,x) - c^2 u_{xx}(t,x) = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times(0,\ell) \quad \ell>0$$

(ARWA)

$$\left.\begin{aligned} u(t,0) &= 0\\ u(t,\ell) &= 0\end{aligned}\right\} \quad t\in(0,\infty) \quad \text{eingespannte Saite}$$

$$\begin{aligned} u(0,x) &= f(x)\\ u_t(0,x) &= g(x)\end{aligned} \quad x\in(0,\ell)$$

Fordern Daten kompatibel mit Einspannbedingung:

$$f(0) = f(\ell) = 0$$

$$g(0) = g(\ell) = 0$$

Bestimmung der Lösung

1.) Lösungsweg nach d'Alembert

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(z)\,dz\right] \qquad \boxed{\text{E}}$$

Benutze $\boxed{\text{E}}$ zur Lsg von (ARWA). Dies liefert Bedingungen an f und g in (ARWA), so daß $\boxed{\text{E}}$ eingeschränkt auf

$(0,\ell)$ (ARWA) löst;

i) $g \equiv 0$, $f \neq 0$: $u(t,0) = 0$ und $u(t,\ell) = 0$ liefern

$$0 = \frac{1}{2}\left[f(ct) + f(-ct) \right] = 0 \quad \forall_{t>0} \Rightarrow f \text{ sollte ungerade sein}$$

$$0 = \frac{1}{2}\left[f(\ell+ct) + f(\ell-ct) \right]$$

$$\overset{f \text{ ungerade}}{=} \frac{1}{2}\left[f(\ell+ct) - f(-\ell+ct) \right] \qquad f(ct) = -f(-ct)$$

$$= \frac{1}{2}\left[f(2\ell+ct-\ell) - f(ct-\ell) \right] \quad \forall_t ,$$

d.h. f sollte 2ℓ-periodisch sein!

ii) $f \equiv 0$, $g \neq 0$ und sei G Stammfunktion zu g

$$u(t,x) = \frac{1}{2c}\left[G(x+ct) - G(x-ct) \right]$$

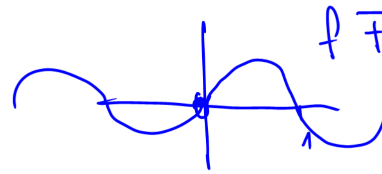
$u(t,0) = 0$, $u(t,\ell) = 0$ ergibt G gerade und 2ℓ-periodisch,

also sollte g ungerade und 2ℓ-periodisch sein.

iii) $f \neq 0$ $g \neq 0$ als Superposition der Fälle i) und ii)

<u>Bspl</u> $f(x) = x(1-x)$, $g(x) \equiv 0$, $x \in [0,1]$, d.h. $\ell = 1$, $c = 1$

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left[(x+t)(1-x-t) + (x-t)(1-x+t) \right]$$



f fortgesetzt

ii) Fourier-Methode, Separation der Variablen

$u(t,x) = T(t)\,X(x)$ Ansatz für Lösung von (ARWA).

DGL liefert

$$X\,\ddot{T} = c^2 X'' T$$

$\cdot$: Ableitung nach t

$'$: — " — x

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{\frac{\ddot{T}}{T}}_{\text{hängt nur von } t \text{ ab}} = c^2 \underbrace{\frac{X''}{X}}_{\text{hängt nur von } x \text{ ab}} \qquad \forall\, t,x$$

d.h. $\frac{X''}{X} \equiv \text{const} := -\lambda$ mit $\lambda > 0$ und erhalten

$$X'' + \lambda X = 0 \qquad \text{in } (0,\ell)$$

$$\ddot{T} + \lambda c^2 T = 0 \qquad \forall\, t > 0$$

und $X(0) = 0$, $X(\ell) = 0$ weil $u(t,0) = 0$

$u(t,\ell) = 0$