Partielle Differentialgleichungen
TUHH
VL 2, 13. April 2017

PDGLen 1. Ordnung

Michael Hinze

Klassifizierung von PDGLen siehe Skripten Struckmeier/Gasser bzw Dziuk

Lösungsverhalten für quasilineare PDGLen erster Ordnung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u)\, u_{x_i} = b(x,u) \qquad x \in \mathbb{R}^n \qquad (Q)$$

<u>Gesucht</u>: Funktion $u = u(x)$, welche diese Gleichung bei gegebenen Koeffizienten löst.

Betrachte dazu zunächst eine lineare homogene PDGL erster Ordnung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, u_{x_i} = 0 \qquad (1)$$

bzw deren Lösungen u.

Wie kommen wir an Infos einer Lösung u heran?

Betrachte "Isolinien" von u, d.h. Kurven $x(t)$, auf denen

u konstant ist, d.h. $t \mapsto x(t)$ und

$$\text{const} \overset{!}{=} u(x(t)) \longrightarrow 0 = \frac{d}{dt} u(x(t)) = Du(x(t))\,\dot{x}(t)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, u_{x_i}$$

falls $\dot{x}(t) = a(x(t)) = \begin{bmatrix} a_1(x(t)) \\ \vdots \\ a_n(x(t)) \end{bmatrix}$ x heißt Charakteristik der PDGL

$u(x)$ ist Lösung (1) gdw u entlang der Lösungen des <u>charakteristischen Systems</u>

$$\dot{x}(t) = a(x(t))$$

konstant ist. Eine Lösung u heißt dann "erstes Integral" des charakteristischen Systems.

Können wir jetzt Lösungen ausrechnen? $\xrightarrow[\text{Schema}]{\text{allg.}}$ Skripte

<u>Bsp</u>: $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$\underset{a_1}{x}\, u_x + \underset{a_2}{y}\, u_y + \underbrace{(x^2+y^2)}_{a_3} u_z = 0$$

Charakteristisches DGL-System:

$$\dot{x}(t) = x(t) \qquad (= a_1(x(t), y(t), z(t)))$$
$$\dot{y}(t) = y(t) \qquad (= a_2(\longmapsto))$$
$$\dot{z}(t) = x^2(t) + y^2(t) \qquad (= a_3(\longmapsto))$$

Damit: $x(t) = c_1 e^t$, $y(t) = c_2 e^t$, $z(t) = \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2)\, e^{2t} + c_3$

Damit gilt für jede Lösung u:

$$\text{const} = u\left(c_1 e^t,\ c_2 e^t,\ \tfrac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2) e^{2t} + c_3 \right) \qquad (*)$$

Aus charakt. DGL System: $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{c_2}{c_1} =: C$ (konstant!)

Ferner $z(t) - \frac{1}{2}\left(x(t)^2 + y(t)^2\right) = c_3 =: D$ (konstant)

Wähle in $(*)$ const $\equiv C = \dfrac{y}{x}$

Dann $u(x,y,z) = \dfrac{y}{x}$ Lösung von (1)

Wähle in $(*)$ const $\equiv D = z - \frac{1}{2}(x^2+y^2) = u(x,y,z)$

Sei $\phi(C,D)$ einmal diffbar. Dann ist
$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$u(x,y,z) = \phi(C,D) = \phi\left(\frac{y}{x},\ z - \tfrac{1}{2}(x^2+y^2)\right) \quad \text{Lösung von (1)}$$

<u>Nachweis</u>: $u(x,y,z) = \phi\left(\frac{y}{x}, z - \frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)$ soll $x u_x + y u_y + (x^2+y^2) u_z = 0$ erfüllen. Rechne nach:

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \phi_C \left(-\frac{y}{x^2}\right) + \phi_D (-x) \\ u_y &= \phi_C \left(\frac{1}{x}\right) + \phi_D (-y) \\ u_z &= \phi_D \end{aligned}\right\} \Rightarrow x u_x + y u_y + (x^2+y^2) u_z = 0$$

Übertrage Ideen zur Lösung von (1) auf Lösung von (Q):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u)\, u_{x_i} = b(x,u)$$

Betrachte für $U(x,u)$ das sogenannte erweiterte System

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u)\, U_{x_i}(x,u) + b(x,u)\, U_u(x,u) = 0, \qquad (2)$$

welches von der Form (1) ist, denn sei $z := (x,u)$, $v = U$, $A_i(z) = a_i(z)$ $i = 1,\dots,n$, $A_{n+1} = b(z)$. Damit (2) $\Longleftrightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n+1} A_i(z)\, v_{z_i} = 0$$

Wir haben: Ist $U(x,u)$ eine Lösung des erweiterten Systems (2) mit $U_u \neq 0$, so ist durch

$$U(x,u) = 0 \quad \Longrightarrow \quad U_x + U_u u_x = 0 \ \text{ bzw } u_x = -U_u^{-1} U_x$$

implizit eine Lösung $u = u(x)$ der Gleichung (Q)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u)\, u_{x_i} = b(x,u)$$

gegeben. Stichwort: Satz über implizite Funktionen!

Nachweis: $U(x,u(x)) = 0$ mit $U \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ und $U_u \neq 0$ liefert für $i = 1,\dots,n$:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_i} U(x,u(x)) = U_{x_i} + U_u u_{x_i} \Longrightarrow U_{x_i} = -U_u u_{x_i}$$

U löst das erweiterte System (2), d.h.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u) \underbrace{U_{x_i}}_{-U_u u_{x_i}} + b(x,u)\, U_u = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} -a_i(x,u)\, U_{x_i}\, U_u + b(x,u)\, U_u = 0$$

$$\overset{U_u \neq 0}{\Longrightarrow} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i(x,u)\, u_{x_i} = b(x,u) \qquad \text{ist erfüllt.}$$

Lösungsprozedur für (Q):

i) Löse erweitertes System mit Methoden für homogene lineare PDGLen $\rightsquigarrow U(x,u)$

ii) Löse $U(x,u) = 0$ nach $u = u(x)$ auf

$\rightsquigarrow u$ Lösung von (Q).

Bsp: $(1+x_1)\,u_{x_1} - (1+x_2)\,u_{x_2} = \underbrace{x_2 - x_1}_{b(x,u)}$

Erw. System: $(1+x_1)\,U_{x_1} - (1+x_2)\,U_{x_2} + (x_2 - x_1)\,U_u = 0$

Char. DGL System:

$$\dot{x}_1 = 1 + x_1 \qquad x_1 = c_1 e^{t} - 1$$

$$\dot{x}_2 = -(1+x_2) \qquad x_2 = c_2 e^{-t} - 1$$

$$\dot{u} = x_2 - x_1 \qquad u = c_3 - c_2 e^{-t} - c_1 e^{t}$$

$$C = (1+x_1)(1+x_2), \qquad D = u + x_1 + x_2$$

$U(x_1, x_2, u) = \Phi\big((1+x_1)(1+x_2),\, u + x_1 + x_2\big)$ ergibt für $\Phi \equiv D$:

$u(x) = -(x_1 + x_2)$ als Lösung.