

6. Die dreidimensionale Wellengleichung

Wir suchen Lösungen $u(\mathbf{x}, t)$ der folgenden AWA für die 3-D Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 \Delta_3 u &= 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, & t \geq 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) &= u_0(\mathbf{x}), & u_t(\mathbf{x}, 0) &= v_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Wir nehmen an, dass (6.1) ein Lösung u besitzt und versuchen, eine explizite Darstellung zu gewinnen. Durch Umkehrung der Schlussweise kann man dann Existenz und Eindeutigkeit zeigen.

Definition (6.2) Zu $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, $t \geq 0$, $r > 0$ heißt

$$M_r[u](\mathbf{x}_0) := \frac{1}{4\pi} \oint_{\|\mathbf{n}\|=1} u(\mathbf{x}_0 + r\mathbf{n}, t) d\omega \quad (6.3)$$

das *sphärische Mittel* von u zum Mittelpunkt \mathbf{x}_0 und Radius $r > 0$.

Bemerkung. Das Integral in (6.3) ist das Oberflächenintegral 1. Art über die Einheitskugel im \mathbb{R}^3 , $d\omega$ ist das zugehörige Oberflächenelement, in Kugelkoordinaten also $d\omega = \cos \psi d(\varphi, \psi)$; vgl. Mathem. für Ing. II, (19.3.14).

Natürlich kann man $M_r[u](\mathbf{x}_0)$ auch als Mittel über die Kugel mit Radius r darstellen

$$M_r[u](\mathbf{x}_0) := \frac{1}{4\pi r^2} \oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=r} u(\mathbf{x}, t) d\sigma, \quad d\sigma = r^2 \cos(\psi) d(\varphi, \psi).$$

Satz (6.4) Ist u eine Lösung der 3-D Wellengleichung, so erfüllt $w(r, t) := r M_r[u](\mathbf{x}_0)$ (bei festem \mathbf{x}_0) die 1-D Wellengleichung.

Beweis. Wir integrieren die Wellengleichung über die Vollkugel $\bar{K}_r(\mathbf{x}_0)$ (bei festem t)

$$\int_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\leq r} u_{tt}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = c^2 \int_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\leq r} \Delta u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

Auf die rechte Seite wenden wir die erste Greensche Formel (19.3.19) an (mit $f = 1$ und $g = u$)

$$\int_G (f \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle) d\mathbf{x} = \oint_{\partial G} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} d\sigma$$

$$\Rightarrow \int_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\leq r} u_{tt}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = c^2 \oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=r} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\sigma.$$

Beide Integrale werden auf die Einheitskugel bezogen:

$$\int_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\leq r} u_{tt}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_0^r \oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=\rho} u_{tt}(\mathbf{x}, t) d\sigma d\rho$$

$$= \int_0^r \rho^2 \oint_{\|\mathbf{n}\|=1} u_{tt}(\mathbf{x}_0 + \rho \mathbf{n}, t) d\omega d\rho,$$

$$\oint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=r} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\omega = r^2 \oint_{\|\mathbf{n}\|=1} \frac{\partial}{\partial \rho} u(\mathbf{x}_0 + \rho \mathbf{n}, t) \Big|_{\rho=r} d\omega.$$

\Rightarrow

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^r \rho^2 \oint_{\|\mathbf{n}\|=1} u(\mathbf{x}_0 + \rho \mathbf{n}, t) d\omega d\rho = c^2 r^2 \oint_{\|\mathbf{n}\|=1} \frac{\partial}{\partial r} u(\mathbf{x}_0 + r \mathbf{n}, t) d\omega$$

Dies mit dem sphärischen Mittel ausgedrückt ergibt

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^r \rho^2 M_\rho[u](\mathbf{x}_0) d\rho = c^2 r^2 \frac{\partial}{\partial r} M_r[u](\mathbf{x}_0). \quad (6.5)$$

Differentiation nach $r \Rightarrow$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (r^2 M_r[u](\mathbf{x}_0)) = c^2 r \left(2 \frac{\partial}{\partial r} M_r[u](\mathbf{x}_0) + r \frac{\partial^2}{\partial r^2} M_r[u](\mathbf{x}_0) \right).$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r M_r[u](\mathbf{x}_0)) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r M_r[u](\mathbf{x}_0)). \quad \square$$

Satz (6.6) Die AWA (6.1) besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung. Diese ist gegeben durch die *Lösungsformel nach Liouville*

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left({}^t M_{ct}[u_0](\mathbf{x}) \right) + {}^t M_{ct}[v_0](\mathbf{x}),$$

Joseph Liouville (1809-1882); Paris

Beweis. Wir zeigen dies für eine feste Stelle \mathbf{x}_0 . Nach (5.2) und (6.4) existieren C^2 -Funktionen Φ und Ψ mit

$$r M_r[u](\mathbf{x}_0) = \Phi(r - ct) + \Psi(r + ct).$$

Für $r \downarrow 0$ ergibt sich hieraus $0 = \Phi(-ct) + \Psi(ct)$, so dass $\Phi(x) = -\Psi(-x)$ und damit

$$r M_r[u](\mathbf{x}_0) = -\Psi(-r + ct) + \Psi(r + ct). \quad (6.7)$$

Dividiert man diese Gleichung durch r und lässt dann $r \downarrow 0$ gehen, so folgt mit der Regel von d'Hospital

$$u(\mathbf{x}_0, t) = 2 \Psi'(ct). \quad (6.8)$$

Differenziert man (6.7) nach r und nach t , so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial r}(r M_r[u]) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(r M_r[u]) = 2 \Psi'(r + ct)$$

Grenzwertbildung $t \downarrow 0$ ergibt mit (6.8)

$$\lim_{t \downarrow 0} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r M_r[u]) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (r M_r[u]) \right] = 2 \Psi'(r) = u(\mathbf{x}_0, \frac{r}{c})$$

\Rightarrow

$$u(\mathbf{x}_0, \frac{r}{c}) = \lim_{t \downarrow 0} \left[M_r[u] + r \frac{\partial}{\partial r} M_r[u] + \frac{r}{c} \frac{\partial}{\partial t} M_r[u] \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left[\oint_{\|\mathbf{n}\|=1} u(\mathbf{x}_0 + r \mathbf{n}, 0) d\omega + r \oint_{\|\mathbf{n}\|=1} \frac{\partial}{\partial r} u(\mathbf{x}_0 + r \mathbf{n}, 0) d\omega \right. \\ \left. + \frac{r}{c} \oint_{\|\mathbf{n}\|=1} u_t(\mathbf{x}_0 + r \mathbf{n}, 0) d\omega \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi} \oint_{\|\mathbf{n}\|=1} \left[u_0(\mathbf{x}_0 + r \mathbf{n}) + r \langle \nabla u_0(\mathbf{x}_0 + r \mathbf{n}), \mathbf{n} \rangle + \frac{r}{c} v_0(\mathbf{x}_0 + r \mathbf{n}) \right] d\omega$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{x}_0, t) &= \frac{1}{4\pi} \oint_{\|\mathbf{n}\|=1} \left[u_0(\mathbf{x}_0 + ct\mathbf{n}) + \langle \nabla u_0(\mathbf{x}_0 + ct\mathbf{n}), ct\mathbf{n} \rangle \right. \\
&\quad \left. + t v_0(\mathbf{x}_0 + ct\mathbf{n}) \right] d\omega \\
&= \frac{1}{4\pi} \oint_{\|\mathbf{n}\|=1} \left[\frac{\partial}{\partial t} \{ t u_0(\mathbf{x}_0 + ct\mathbf{n}) \} + t v_0(\mathbf{x}_0 + ct\mathbf{n}) \right] d\omega \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \{ t M_{ct}[u_0](\mathbf{x}_0) \} + t M_{ct}[v_0](\mathbf{x}_0). \quad \square
\end{aligned}$$

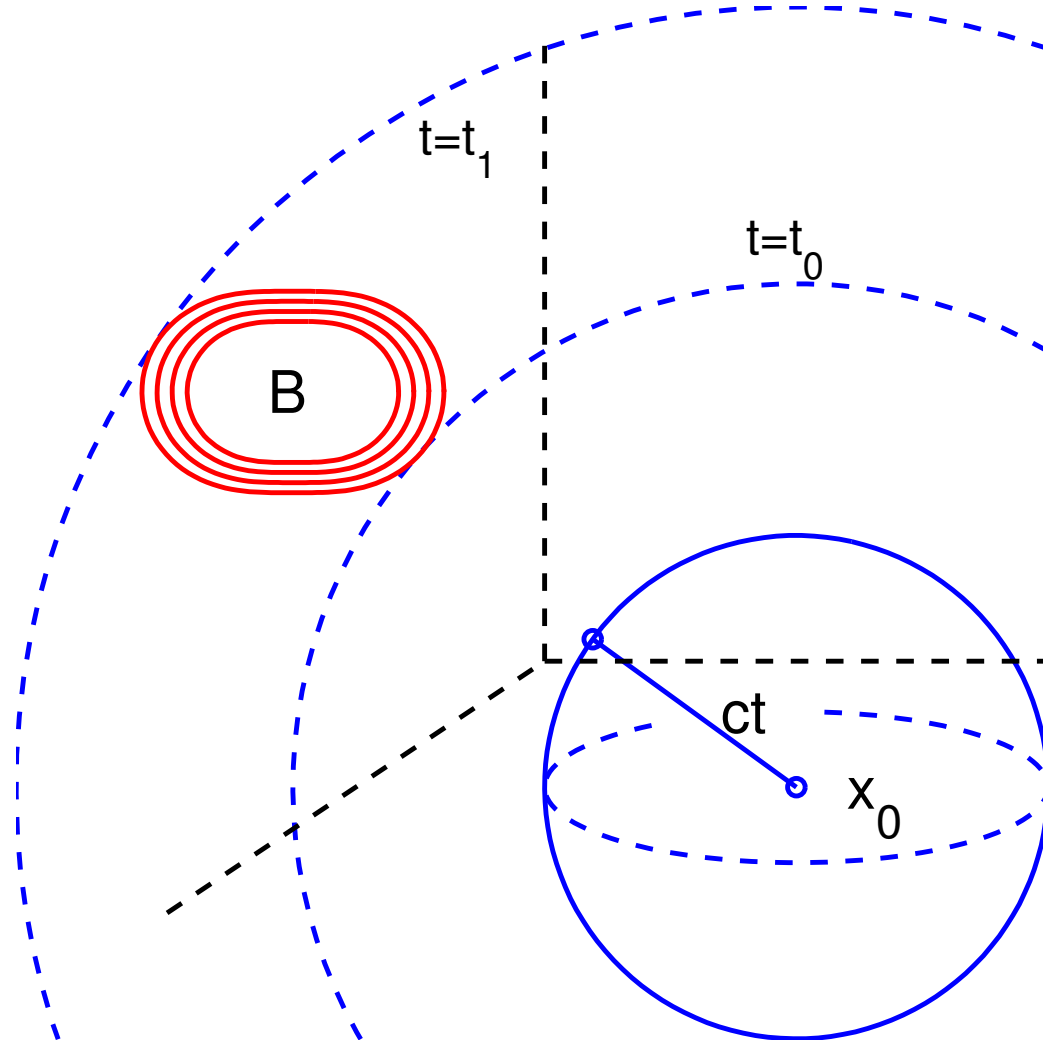
Bemerkungen (6.9)

- Für den eigentliche Beweis muss die obige Schlussweise umgekehrt werden; man hat ja zu zeigen, dass durch die Liouvillesche Formel tatsächlich eine Lösung der Wellengleichung gegeben ist. Die Eindeutigkeit folgt aus der obigen Schlussrichtung.

- Nach der Liouvilleschen Formel hängt die Lösung der dreidim. Wellengleichung nur von den sphärischen Mitteln der Anfangsfunktionen zu mit der Zeit wachsenden Radien $r = ct$ ab.
- Eine von einem beschränkten Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ ausgehende Störung (Anfangswerte u_0, v_0 nur in B von Null verschieden) erreicht einen vorgegebenen Punkt $\mathbf{x}_0 \notin B$ also erst zu einer Zeit $t_0 > 0$ und verschwindet in \mathbf{x}_0 zu einer festen Zeit $t_1 > t_0$ wieder. Dies ist das *Prinzip von Huygens*, benannt nach **Christiaan Huygens (1629-1695)**.
- Nach einem Satz von **Jacques Hadamard (1865-1963)** gilt das Huygenssche Prinzip nur in Räumen mit ungerader Dimension. Insbesondere ist die Aussage für ebene Schallausbreitung (\mathbb{R}^2) falsch, wie wir im Folgenden auch zeigen wollen.

Christiaan Huygens (1629-1695); Den Haag, Paris, London

Jacques Hadamard (1865-1963); Paris



Die zweidimensionale Wellengleichung.

Betrachten wir die analoge Anfangswertaufgaben für die Wellengleichung im \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 \Delta_2 u &= 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, & t \geq 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) &= u_0(\mathbf{x}), & u_t(\mathbf{x}, 0) &= v_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Man kann die Lösung von (6.10) aus der Liouvilleschen Formel für den \mathbb{R}^3 ableiten, wenn man annimmt, dass die Anfangsfunktionen und die Lösung von x_3 unabhängig ist. Dies ist die sogenannte **Abstiegsmethode nach Hadamard**.

Wir haben die spärischen Mittel zu berechnen

$$M_r[g](\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\|\mathbf{n}\|=1} g(\mathbf{x}_0 + r\mathbf{n}, t) d\omega,$$

wobei g von der dritten Komponente ($z_0 + rn_3$) unabhängig sein soll.

Wir parametrisieren die Einheitskugel (jeweils obere und untere Kugelkappe) als Graph der Funktion $n_3 = \pm\sqrt{1 - n_1^2 - n_2^2}$, bzw.

$$n_1 := \xi_1, \quad n_2 := \xi_2, \quad n_3 := \pm\sqrt{1 - \xi_1^2 - \xi_2^2}, \quad \text{mit } \|\xi\| \leq 1.$$

Für das Oberflächenelement ergibt sich dann nach (19.3.8)

$$d\omega = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi_1^2 - \xi_2^2}} d(\xi_1, \xi_2).$$

und wir erhalten für die sphärischen Mittel die 2-dim. (!) Integrale

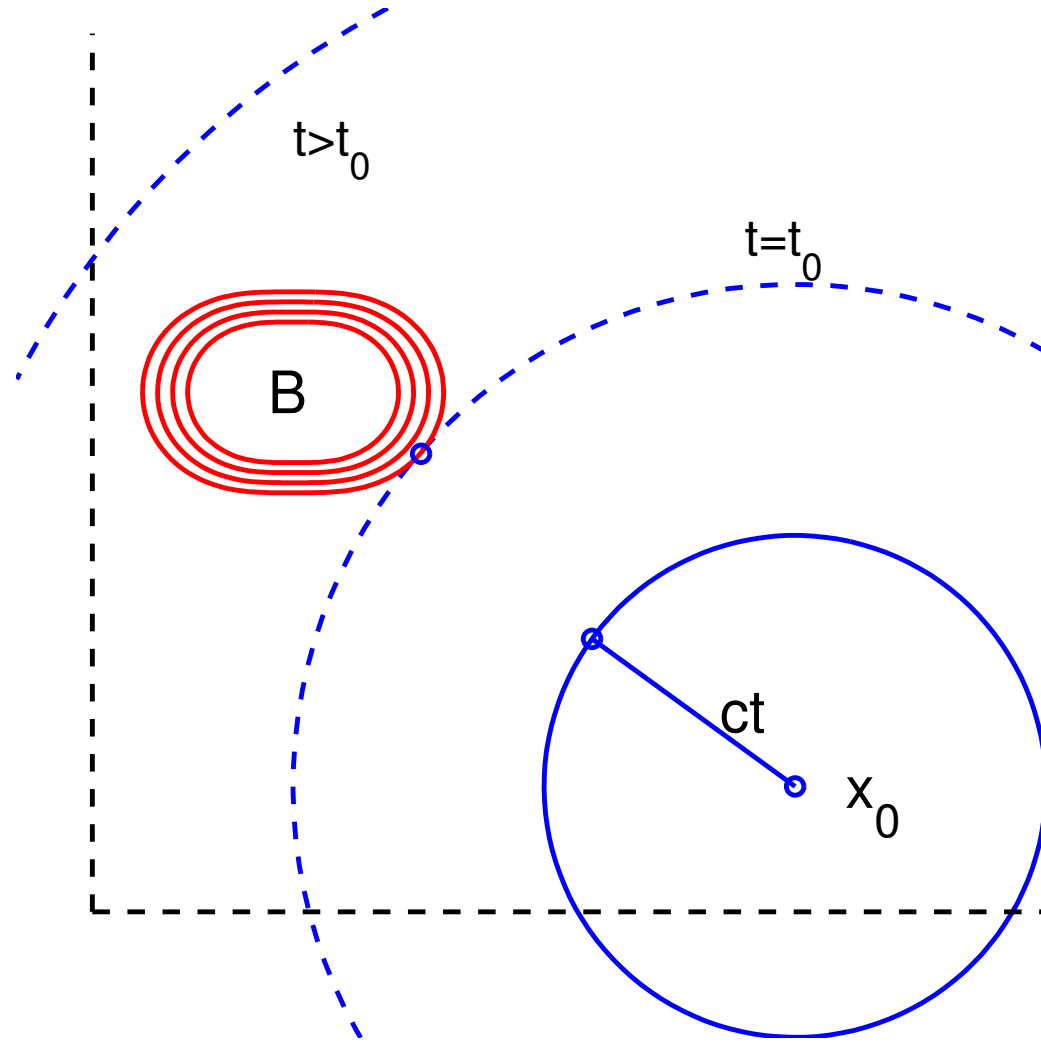
$$M_r[g](\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\|\xi\| \leq 1} \frac{g(\mathbf{x}_0 + r\xi, t)}{\sqrt{1 - \xi_1^2 - \xi_2^2}} d\xi. \quad (6.11)$$

Hierbei sind nun \mathbf{x}_0 und ξ im \mathbb{R}^2 . Die Lösungsformel (6.6) nach Liouville bleibt unverändert bestehen.

Was ist die praktische Konsequenz dieser Überlegung?

Im Unterschied zum dreidimensionalen Fall hat man die Anfangsfunktionen u_0 und v_0 über *Kreisscheiben* mit wachsenden Radien $r = ct$ zu mitteln.

Eine von einem beschränkten Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$ ausgehende Störung trifft nach wie vor zu einer bestimmten Zeit $t_0 > 0$ in $x_0 \notin B$ ein. Von diesem Zeitpunkt an macht sich die Störung jedoch für alle $t \geq t_0$ in x_0 bemerkbar. Die Störung klingt unendlich lange nach.. das Huygenssche Prinzip ist damit nicht gültig!



Wellenformen.

Hierunter versteht man spezielle Lösungen der Wellengleichung

$$u_{tt} - c^2 \Delta_3 u = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0,$$

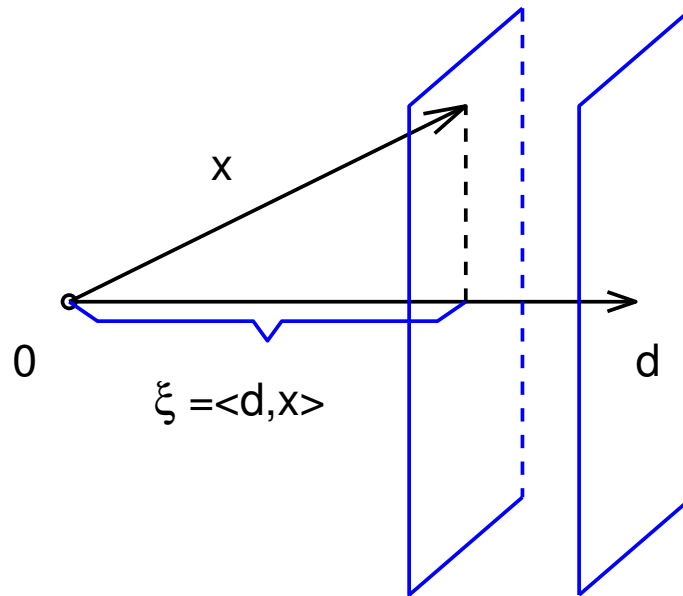
die sich in ihrem zeitlichen Verlauf wie harmonische Schwingungen verhalten. Wir benutzen die komplexe Darstellung und den Ansatz

$$u(\mathbf{x}, t) = A e^{i\omega t} g(\mathbf{x}) \quad (6.12)$$

und erhalten die PDG

$$\omega^2 g(\mathbf{x}) + c^2 \Delta g(\mathbf{x}) = 0. \quad (6.13)$$

Ebene Wellen. Hierunter verstehen wir Wellen der Form (6.12) mit einer feste Ausbreitungsrichtung $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$, $\|\mathbf{d}\| = 1$, die auf Ebenen senkrecht zu \mathbf{d} konstant sind.



Damit hängt u bzgl. des Ortes nur von $\xi := \langle d, x \rangle$ ab, $g(x) = h(\xi)$, und wir erhalten aus (6.13) die gewöhnliche DGL

$$c^2 h''(\xi) + \omega^2 h(\xi) = 0 \quad (6.14)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$h(\xi) = \alpha e^{-i(\omega/c)\xi} + \beta e^{i(\omega/c)\xi}.$$

Berücksichtigen wir nur den ersten Summanden (den zweiten erhält man, wenn man \mathbf{d} durch $-\mathbf{d}$ ersetzt), so erhalten wir nach Rücktransformation die **ungedämpfte ebene harmonische Welle**

$$u(\mathbf{x}, t) = A e^{i\omega(t - \langle \mathbf{d}, \mathbf{x} \rangle / c)}. \quad (6.15)$$

Kugelwellen. Dies sind Wellen, die auf Kugeln um ein Zentrum (o.E.d.A. der Ursprung) konstant sind. Bzgl. der allgemeinen Darstellung (5.12) gilt damit $g(\mathbf{x}) = h(r)$, wobei $r := \|\mathbf{x}\|_2$ ist.

Da sich der Laplace-Operator für Ursprungs-symmetrische Funktionen gemäß Lehrbuch (17.1.19) durch $\Delta u = u''(r) + (2/r)u'(r)$ darstellen lässt, ergibt sich aus (6.13) die folgende gewöhnliche DGL für $h(r)$

$$h''(r) + \frac{2}{r} h'(r) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 h(r) = 0. \quad (6.16)$$

Die allgemeine Lösung (mit dem Ansatz $h(r) = r^k e^{\lambda r}$) lautet

$$h(r) = \frac{\alpha}{r} e^{-i(\omega/c)r} + \frac{\beta}{r} e^{i(\omega/c)r}.$$

Berücksichtigen wir wiederum nur die erste Lösung (auslaufende Welle), so erhalten wir mit (6.12) die spezielle Lösung

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{A}{\|\mathbf{x}\|} e^{i\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c)}. \quad (6.17)$$

Zylinderwellen. Dies sind Wellen, die auf Kreiszyklindern (o.E.d.A. mit der z -Achse als Symmetrieachse) konstant sind. In Analogie zu den beiden letzten Spezialfällen hat man dann eine Darstellung $g(\mathbf{x}) = h(r)$, mit $r := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Mittels Zylinderkoordinaten erhält man dann aus (6.13) die

gewöhnliche DGL

$$h''(r) + \frac{1}{r} h'(r) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 h(r) = 0. \quad (6.18)$$

Obgleich die DGL derjenigen in (6.16) ähnelt, ist diese nun nicht elementar integrierbar. Die Transformation $y(x) := h(r)$; $x = (\omega/c)r$ führt auf die **Besselsche DGL**

$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) + y(x) = 0. \quad (6.19)$$

Eine in $x = 0$ reguläre Lösung ist die Bessel-Funktion nullter Ordnung $J_0(x)$, vgl. Lehrbuch (13.6.4). Damit wird

$$h(r) = J_0\left(\frac{\omega}{c}r\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos\left(\frac{\omega}{c}r \sin \xi\right) d\xi$$

und für die Zylinderwelle erhalten wir

$$u(\mathbf{x}, t) = A e^{i\omega t} J_0\left(\frac{\omega}{c} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right). \quad (6.20)$$

