Aufgabe 1) [10 Punkte]

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Produktansatzes $u(x,t) = v(x)w(t)$ eine Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$u_t - 5u_{xx} = 0 \qquad 0 < x < \frac{1}{2}, \qquad t \in \mathbb{R}^+,$$

$$u(x,0) = 3 \cdot \sin(2\pi x) + 5 \cdot \sin(4\pi x), \qquad 0 \le x \le \frac{1}{2},$$

$$u(0,t) = u(\frac{1}{2},t) = 0, \qquad t \ge 0.$$

b) Bestimmen Sie eine rotationssymmetrische Lösung der Randwertaufgabe

$$\Delta u(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}, \qquad 1 < x^2+y^2 < 4,$$

$$u(x,y) = \frac{1}{4}, \qquad \text{für } x^2+y^2 = 1,$$

$$u(x,y) = 3, \qquad \text{für } x^2+y^2 = 4.$$

Aufgabe 2) [10 Punkte]

a) Berechnen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$:

$$u_t - t^2 u_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+,$$

$$u(x,0) = e^{-x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

b) Gegeben ist die folgenden Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$:

$$u_t + u \cdot u_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & x \le 0 \\ \frac{1}{2} & 0 < x \le 3 \\ 0 & 3 < x. \end{cases}$$

(i) Berechnen Sie eine schwache Lösung für $t \in [0,\tilde{t}\,]$ mit einem hinreichend kleinem $\tilde{t}$.

(ii) Bis zu welchem t^* kann die Lösung aus i) maximal fortgesetzt werden?

(iii) Geben Sie eine schwache Lösung für $t > t^*$ an.

Aufgabe 3) [4 Punkte]

Sei $u(x,y)$ eine Lösung der folgenden Randwertaufgabe:

$$\Delta u = 0, \qquad \text{in } \Omega :=]0,2[\times]0,1[$$

$$u(x,y) = 3x^2 \qquad \text{auf } \partial\Omega.$$

Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie zutreffend ist. Begründen Sie Ihre Antworten.

- Es gilt $\max\limits_{\{(x,y)\in\bar{\Omega}\}} u(x,y) = 2$.
- Es gilt $\min\limits_{\{(x,y)\in\bar{\Omega}\}} u(x,y) = 0$.
- $u(x,y) = 3x^2 - 3y^2$ ist eine Lösung der Randwertaufgabe.