Fachbereich Mathematik **SoSe 2017**
Prof. Dr. M. Hinze

Klausur Differentialgleichungen II

31. August 2017

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur. In die Wertung gehen maximal 20 Punkte ein.
Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt
mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Studiengang:	AIW	CI	ET	GES	IIW	MB	MTB	SB	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

Aufg.	Punkte	Korrekteur
1		
2		
3		

$\sum =$

Aufgabe 1) [10 Punkte]

Bestimmen Sie mit Hilfe des Produktansatzes $u(x,t) = v(x)w(t)$ eine Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} - 9u_{xx} &= 0 \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \qquad t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= 3 \cdot \sin(6x), \qquad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ u_t(x,0) &= \pi x - 2x^2, \qquad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ u(0,t) &= u(\frac{\pi}{2},t) = 0 \qquad t \ge 0. \end{aligned}$$

Lösung zur Aufgabe 1:

Ein Produktansatz der Form $u(x,t) = v(x) \cdot w(t)$ liefert die bekannte RWA

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -\lambda,\ v(0) = v(\tfrac{\pi}{2}) = 0$$

Wegen $v(0) = v(\frac{\pi}{2}) = 0$ erhält man nur für $\boxed{\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = (2k)^2}$ nichttriviale Lösungen, und zwar: $v_k(x) = \sin(2kx)$. **[1 Punkt]**

Die Differentialgleichung für w_k lautet somit:
$w_k''(t) = -9\lambda_k \cdot w_k(t) \iff$

mit den Lösungen $w_k(t) = a_k \cos(6kt) + b_k \sin(6kt)$.

Wir erhalten also

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(6kt) + b_k \sin(6kt)) \sin(2kx)}$$

Zu erfüllen sind noch die Anfangsbedingungen. Aus

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(2kx) \stackrel{!}{=} 3\sin(6x).$$

folgt $\boxed{a_3 = 3,\ a_k = 0\ \forall k \neq 3.}$ **[2 Punkte]**

Wegen $u_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-6k\, a_k \sin(6kt) + 6k\, b_k \cos(6kt)) \sin(2kx)$

lautet die zweite Anfangsbedingung

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} 6k\, b_k \sin(2kx) \stackrel{!}{=} \pi x - 2x^2 \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Wir bestimmen die Fourier-Koeffizienten der ungerade, $\pi-$periodisch fortgesetzten rechten

Seite:

$$\begin{aligned}
B_k &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi x - 2x^2)\sin(2kx)dx \quad \textbf{[1 Punkt]}\\
&= \frac{4}{\pi}\ (\pi x - 2x^2)\frac{-\cos(2kx)}{2k}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi - 4x)\frac{-\cos(2kx)}{2k}\,dx\\
&= \frac{4}{2k\pi}\ (\pi - 4x)\frac{\sin(2kx)}{2k}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4}{2k\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}-4\,\frac{\sin(2kx)}{2k}\,dx\\
&= -\frac{4}{k^2\pi}\ \frac{\cos(2kx)}{2k}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2(1-\cos(k\pi))}{k^3\pi} \quad \textbf{[3 Punkte]}
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir $\boxed{b_k == \frac{B_k}{6k} = \dfrac{1-\cos(k\pi)}{3k^4\pi}\,.}$ **[1 Punkt]**

und

$$\boxed{u(x,t) = 3\cos(18t)\sin(6x) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos(k\pi)}{3k^4\pi}\ \sin(\,6kt)\ \sin(2kx)} \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Aufgabe 2) [10 Punkte]

a) Berechnen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$:

$$u_t + \tfrac{1}{2}\, u_x = -4\, u, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+,$$
$$u(x,0) = 2\sin(x) \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

b) Gegeben ist die folgende Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$:

$$u_t + \tfrac{u^2}{2}\, u_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+$$
$$u(x,0) = 2 + \arctan(x) \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

(i) Sind die Charakteristiken Geraden? Begründen Sie Ihre Antwort.

(ii) Skizzieren Sie die Charakteristik durch den Punkt $(0,0)$.

Lösung zur Aufgabe 2:

a) Mit der Charakteristiken-Methode rechnet man:

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \Longrightarrow x(t) = \frac{t}{2} + C \Longrightarrow 2x - t = C$ **[1 Punkt]**

$\frac{du}{dt} = -4u \Longrightarrow \frac{du}{u} == -4\, dt \Longrightarrow \ln(|u|) = -4t + d$

$|u| = e^{-4t} \cdot \tilde{d}, \qquad \tilde{d} \in \mathbb{R}^+$

Da $u = 0$ ebenfalls eine Lösung ist, erhalten wir

$u(x(t),t) = D \cdot e^{-4t}, \qquad D \in \mathbb{R} \qquad$ oder $\qquad D = u \cdot e^{4t}.$ **[2 Punkte]**

Anwendung des Satzes über implizite Funktionen, liefert die allgemeine Lösung:

$D = f(C) \Longrightarrow u \cdot e^{4t} = f(2x - t) \Longrightarrow u(x,t) = e^{-4t} \cdot f(2x-t).$ **[1 Punkt]**

Die Anfangsbedingung verlangt:

$u(x,0) = e^0 \cdot f(2x - 0) \overset{!}{=} 2\sin(x) \Longrightarrow f(x) = 2\sin(\frac{x}{2})\,.$ **[1 Punkt]**

$u(x,t) = 2\, e^{-4t} \sin\left(x - \frac{t}{2}\right).$ **[1 Punkt]**

b)

$$u_t + \tfrac{u^2}{2}\, u_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+$$
$$u(x,0) = 2 + \arctan(x) \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

(i) Für die Charakteristiken erhält man, einerseits

$\frac{du}{dt} = 0 \Longrightarrow u$ ist also konstant entlang der Charakteristiken. **[1 Punkt]**

Andererseits haben die Charakteristiken die Steigung $\frac{dx}{dt} = \frac{u^2}{2}\,.$
Die Steigung der Charakteristiken ist also Konstant. Es handelt sich um Geraden. **[1 Punkt]**

(ii) Die Charakteristik durch den Punkt $(0,0)$ ist eine Gerade $(x(t),t)$ durch $(0,0)$ mit
$\dot{x}(t) = \frac{u(0,0)^2}{2} = \dfrac{(2 + \arctan(0))^2}{2} = 2$, also die Gerade $x = 2t$. **[1 Punkt]**
Skizze **[1 Punkt]**

Aufgabe 3) [4 Punkte]

Prüfen Sie, welche der unten angegebenen Funktionen $u^*, \tilde{u}, \hat{u}$ eine physikalisch sinnvolle Viskositätslösung der Anfangswertaufgabe

$$u_t + u\,u_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \le 0, \\ 1 & \text{für } x > 0\,. \end{cases},$$

ist.

$$u^*(x,t) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \le \frac{1}{2}t, \\ 1 & \text{für } x > \frac{1}{2}t\,, \end{cases} \qquad \tilde{u}(x,t) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \le \frac{3}{2}t, \\ 1 & \text{für } x > \frac{3}{2}t\,. \end{cases}$$

$$\hat{u}(x,t) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \le 0, \\ 2 - \frac{x}{t} & \text{für } 0 < x \le t, \\ 1 & \text{für } x > t\,. \end{cases}$$

Lösung zur Aufgabe 3:

u^* erfüllt nicht die Sprungbedingung: $\dot{s}(t) = \frac{1+2}{2}$. [**1 Punkt**]

$\tilde{u}$ ist eine Viskositätslösung, die die Sprungbedingung erfüllt. [**1 Punkt**]

$\hat{u}$ ist keine Lösung der Differentialgleichung . Denn zum Beispiel für $0 < x < t$ gilt:

$\hat{u}_t + \hat{u}\,\hat{u}_x = \frac{x}{t^2} + (2 - \frac{x}{t})(\frac{-1}{t}) = \frac{2x-2t}{t^2} \neq 0, \qquad$ für $x \neq t$. [**2 Punkte**]