

## Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 7, Hausaufgaben

**Aufgabe 1:** Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen aus der Vorlesung sei folgende Randwertaufgabe für die Poisson-Gleichung mit Robin Randbedingungen gegeben:

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= -f(x, y) && \text{im Inneren von } D \subset \mathbb{R}^2, \\ u(x, y) &= g(x, y) && \text{auf } \Gamma_1 \subset \partial D, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) + \alpha \cdot u(x, y) &= h(x, y) && \text{auf } \Gamma_2 = \partial D \setminus \Gamma_1.\end{aligned}$$

Leiten Sie analog zur Vorgehensweise in Vorlesung 9 für die Poisson-Gleichung mit Dirichlet Randbedingungen eine schwache Formulierung des Problems her.

#### Aufgabe 2:

Die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned}-u'' &= 1, && x \in (0, 1), \\ u(0) &= 1, \\ u'(1) + u(1) &= 1\end{aligned}$$

kann natürlich analytisch gelöst werden (wie?). Hier soll jedoch eine Näherung mit Hilfe der Methode der finiten Elemente berechnet werden. Zerlegen Sie das Intervall  $(0, 1)$  dazu in  $(n + 1)$  Teilintervalle gleicher Länge  $h = \frac{1}{n+1}$  und verwenden Sie die Testfunktionen  $b_i$  und

den Ansatz  $u_h = \sum_{i=0}^{n+1} u_i b_i(x)$  aus der Vorlesung 11.

- Stellen Sie das Gleichungssystem zur Bestimmung der Unbekannten  $u_i$  auf.
- Lösen Sie das System für  $n = 3$ .