Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2017**
Prof. Dr. M. Hinze,
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6, Präsenzaufgabe

Aufgabe 1:

a) Für welche reellen Parameter α, β, γ sind die folgenden Funktionen im $\mathbb{R}^2$ harmonisch?

i) $u(x,y) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + \alpha y^2)$ ii) $\tilde{u}(x,y) = \sin(2x) \cdot e^{\beta y}$, ,

iii) $\hat{u}(x,y) = \sin(2x) \cdot \sinh(\gamma y)$.

b) Sei $\Omega := \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\right\}$ und u die Lösung der Randwertaufgabe

$$\Delta u(x,y) = 0 \qquad \text{in } \Omega\,, \qquad u(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2} \qquad \text{auf} \quad \partial\Omega.$$

Bestimmen Sie den Wert von u im Ursprung.

Hinweis: $\cos^2(\varphi) = \dfrac{\cos(2\varphi)+1}{2}$.

Aufgabe 2:

Nach Blatt 5 Hausaufgaben lautet die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ in Polarkoordinaten

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0\,.$$

Lösen Sie die folgende Dirichlet Randwertaufgabe auf dem Kreis $r^2 = x^2 + y^2 \leq 9$.

$$\begin{aligned} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} &= 0 & \qquad 0 \leq r < 3\,, \\ u(3,\varphi) &= \cos^2(\varphi) & \qquad \varphi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tipp: Für die Lösung einer Differentialgleichung der Form $r^2 \cdot g''(r) + ar \cdot g'(r) + b \cdot g(r) = 0$ kann man den Ansatz $g(r) = r^k$ verwenden.