Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2017**
Prof. Dr. M. Hinze
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Ermitteln Sie die Lösung $u(x,t)$ der folgenden Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t + 2u_x + u &= 0, \qquad x,t > 0 \\ u(x,0) &= 0 \qquad (x \geq 0) \\ u(0,t) &= t^2 \qquad (t \geq 0) \end{aligned}$$

a) mittels der Charakteristikenmethode. Bestimmen Sie dazu einerseits die Lösung zur Anfangsbedingung $u(x,0) = 0,$ und andererseits die Lösung zur Randbedingung $u(0,t) = t^2$ und setzen Sie diese Lösungen stetig zusammen.

b) mittels Laplace–Transformation bzgl. der Variablen t. Bei der Transformation ist x als Parameter aufzufassen. Im Bildraum ist eine Anfangswertaufgabe bzgl. einer gewöhnlichen Differentialgleichung in x zu lösen.

Aufgabe 2:

a) Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t + a(x,t)u_x &= b(x,t) \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) &= g(x) \qquad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

mit gegebenen hinreichend glatten Funktionen a, b, g. Die Charakteristiken seien (wie in der Vorlesung eingeführt) die Kurven $(t, x(t))^T$ mit

$$\begin{aligned} x'(t) &= a\,(x(t), t)\,, \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, analog zur Vorgehensweise in der Vorlesung für die homogene Differentialgleichung, dass für die Lösung der hier gegebenen inhomogenen Differentialgleichung entlang dieser Charakteristiken

$$\frac{d}{dt} u\,(x(t), t) = b\,(x(t), t)$$

und damit

$$u\,(x(t), t) = g(x(0)) + \int_0^t b\,(x(\tau), \tau)\, d\tau$$

gilt.

b) Lösen Sie das Cauchy–Problem

$$\begin{aligned} u_t + u_x &= x^2 \qquad && x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) &= \sin(x) \qquad && x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(i) mit Hilfe von a)

(ii) mit Hilfe des in der Vorlesung eingeführten erweiterten Problems.

Abgabetermine: 24. - 28.4.17 bzw. 8. - 12.5