Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani

WiSe 17/18
01.02.2018

Klausurberatung Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Die ins Netz gestellten Dateien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen können diese Unterlagen irreführend sein.

Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Die Aufzählung wichtiger Themen bedeutet NICHT den Ausschluss anderer Themen für die Klausur.

24 Punkte!

Häufigste Themen der letzten Klausuren

- Charakteristikenmethode quasilineare Differentialgleichung

  $$u_t(x,t) + a(x,t,u)\, u_x(x,t) = b(x,t,u)\,.$$

  Hilfsproblem :

  $$U_t + a \cdot U_x + b \cdot U_u = 0 \tag{1}$$

  $$\frac{dt}{ds} = 1 \qquad \frac{dx}{ds} = a(x,t,u), \qquad \frac{du}{ds} = b(x,t,u)$$

  oder (mit t als Parameter)

  $$\frac{dx}{dt} = a(x,t,u)\,, \qquad \frac{du}{dt} = b(x,t,u). \tag{2}$$

  Passende Aufgaben: Blätter 2

- **Burgers- und ähnliche Gleichungen, Verdünnungs- und Stoßwellen**

$$u_t(x,t) \,+\, u\,u_x(x,t) \,=\, 0\,.$$

$$\frac{dx}{dt} \,=\, u(x(t),t) = u\,, \qquad \frac{du}{dt} \,=\, 0. \tag{3}$$

Charakteristikensteigung hängt nur von u ab

u ist konstant auf Charakteristik

Charakteristiken sind Geraden.

Stoß- und Verdünnungswellen

Passende Aufgaben: Blätter 3

- **Wellengleichung**

  - ARWA $x \in [0, L] \subset \mathbb{R}$

  - Inhomogene Randwerte: Homogenisierung der Randwerte

  - Homogene Randwerte: unbedingt **geschlossene Lösungsdarstellungen verwenden!** – Anfangsbedingungen aufschreiben – Eventuell Koeffizientenvergleich sonst Fourier-Reihen

Passende Aufgaben: Blätter 4 und B5-P1

- **Laplace-/Potentialgleichung, Poisson-Gleichung**

  - Poisson-Gleichung: nur radialsymmetrisch $\Delta u = f(r)$
    Passende Aufgaben: 5H-1B,

  - Laplace, polar: auf Kreis/Ring/Sektor
    Wir haben wieder **geschlossene Lösungsdarstellungen**
    Passende Aufgaben: B6-P2
  - Laplace, kartesisch: auf Rechteck
    Passende Aufgaben: B6-H1, B6-H2

  - Eigenschaften harmonischer Funktionen
    Mittelwerteigenschaft, Maximumprinzip
    Passende Aufgaben: B6-P1, B6-H1

- **ARWA Wärmeleitungsgleichung**

Wie bei der Wellengleichung:

– Inhomogene Randwerte: Homogenisierung der Randwerte

– Homogene Randwerte: unbedingt **geschlossene Lösungsdarstellungen verwenden!**

Passende Aufgaben: 7P-1, (Homogenisierung: 4H-2).

- **Absolut notwendige Techniken**
  - gewöhnliche DGL lösen
  - Ganz einfache Integrale, partielle Integration,
  - Fourier-Koeffizienten berechnen,
  - polar $<--->$ kartesisch

Blatt 1:

P1: Lösungen Eigenwertaufgabe $y'' = \lambda y$, $y(0) = y(L) = 0$

P2: Berechnung von Fourier-Koeffizienten

Blatt 2:

P1, P2, H1: Charakteristiken-Methode, AWA

H2a: Alternative zu Charakteristiken-Methode,

H2b: Charakteristiken-Methode.

Blatt 3:

P1a: Burgers-Gleichung: zwei Verdünnungswellen, Schwache Lösung

P1b: Burgers-Gleichung: zwei Stoßwellen, Viskositätslösung

P2: Burgers- ähnliche Gleichung, Charakterisktiken, Lösung nur für endliche t

H1a: Burgers- ähnliche Gleichung: stetige Anfangsdaten, monoton fallend,

H1b: Sind die Charakteristiken Geraden?

H1c: andere Anfangsdaten, Charakteristiken skizzieren

H2a: Verkehrsmodell, Kontinuitätsgleiichung herleiten.

H2b: Burgers- ähnlich: Entropiebedingung

i) Kontinuitätsgleichung ($u_t + q_x = 0$) aufstellen.

ii) Sind Charakteristiken Geraden? Steigungen der Charakteristiken bestimmen.

iii) Skizzieren der Charakteristiken, Rankine-Hugoniot-Bedingung (Viskositätslösung)

Blatt 4: (Wellengleichung)

P1: AWA Wellengleichung, 1-D, d'Alembert

P2: ARWA Wellengleichung,1-D, homogene DGL, homogene Randwerte

H1: $u_{tt} + au_{xt} + bu_{xx} = 0$ mittels Substitution lösen.

H2: ARWA Wellengleichung, inhomogene Randwerte, DGL nach Homogenisierung der Randwerte auch homogen

Blatt 5:

P: Wellengleichung inhomogen, ARWA, Randwerte $= 0$

H1a) $\Delta u = 0$ in polar herleiten.

H1b) Radialsymmetrische Lösung auf Ring

H2) Wellengleichung 3D

Blatt 6:

P1: Prüfen ob Funktion harmonisch, Mittelwerteigenschaft

P2: Laplace-Gleichung polar (Innenraum)

H1: $\Delta u = -2$

H1a: Zeige $v = u +$ ... löst $\Delta u = 0$

H1b: Maximumprinzip für v

H1c: Max/Min von $u(0,0)$

H2: Laplace-Gleichung auf Rechteck,

Randwerte auf einer Kante $\neq 0$, Fourier-Koeffizienten berechnen

Blatt 7:

P1: ARWA Wärmeleitung, Fourier-Koeffizienten berechnen

P2: Schwache Formulierung 1D, Testfunktionen, Vorteil?

H1: Schwache Formulierung 2D

H2: Finite Elemente

Zusammenstellung geschlossener Lösungsformeln

(ohne Gewähr, bitte vor der Klausur mit Vorlesung/Formelsammlung abgleichen!)

Wellengleichung:

A) AWA, homogen:

$\tilde{u}_{tt} - c^2 \tilde{u}_{xx} = 0$, $\tilde{u}(x,0) = f(x)$, $\tilde{u}_t(x,0) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\alpha)\, d\alpha$$

B) ARWA, homogen, homogene Randwerte:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \qquad x \in (0, L),\ t > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = w_0(x) \qquad x \in (0, L)$$

$$u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0 \qquad t > 0 \qquad \omega := \frac{\pi}{L}$$

$$u(x,t) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \, \cos\left(ck\omega t\right) \ + \ B_k \, \sin\left(ck\omega t\right)\right] \sin\left(k\omega x\right)$$

$$u(x,0) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} A_k \, \sin\left(k\omega x\right) \ \overset{!}{=} u_0(x)$$

$$u_t(x,0) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} \ ck\omega \cdot B_k \, \sin\left(k\omega x\right) \overset{!}{=} w_0(x)$$

Eventuell Koeffizientenvergleich möglich. Sonst:

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(\alpha) \sin(k\omega\alpha)\, d\alpha, \quad B_k = \frac{2}{ck\pi} \int_0^L w_0(\alpha) \sin(k\omega\alpha)\, d\alpha$$

bzw. $B_k = \dfrac{L}{ck\pi} b_k$ mit $b_k = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L w_0(\alpha) \sin(k\omega\alpha)\, d\alpha,$

C) **Inhomogene** Differentialgleichung, **homogene** Randdaten

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x,t) \qquad c > 0,\ x \in (0,L),\ t > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad x \in (0,L),$$

$$u_t(x,0) = v_0(x) \qquad x \in (0,L),$$

$$u(0,t) = 0 \qquad t > 0,$$

$$u(L,t) = 0 \qquad t > 0,$$

Mit $\omega = \frac{\pi}{L}$

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin(k\omega x)}$$

Löse: $q_k''(t) + c^2k^2\omega^2 q_k(t) \;=\; c_k(t)\,, \qquad q_k(0) = a_k,\; q_k'(0) = b_k$

Mit: $a_k = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L u_0(x)\sin(k\omega x)\,dx.$

$$b_k = \frac{2}{L}\int_0^L v_0(x)\sin(k\omega x)\,dx.$$

$$c_k(t) = \frac{2}{L}\int_0^L h(x,t)\sin(k\omega x)\,dx.$$

Fourier-Koeffizienten evtl. über Koeffizientenvergleich berechnen!

D) ARWA, inhomogene Randwerte:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \qquad x \in (0, L),\ t > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = w_0(x) \qquad x \in (0, L)$$

$$u(0,t) = g(t) \qquad u(L,t) = h(t) \qquad t > 0$$

Randwerte homogenisieren :

$$v(x,t) = u(x,t) - g(t) - \frac{x}{L}(h(t) - g(t))$$

ergibt neue Aufgabe für v mit homogenen Randwerten.

Falls neue Dgl. homogene Wellengleichung : Fall B)
Falls neue Dgl. inhomogene Wellengleichung : Fall C)

Wärmeleitungsgleichung
I) ARWA, homogen, homogene Randwerte

$$u_t - cu_{xx} = 0 \qquad c > 0,\ x \in (0, L),\ t > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad x \in [0, L],$$

$$u(0,t) = 0 \qquad t > 0,$$

$$u(L,t) = 0 \qquad t > 0,$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-c\omega^2 k^2 t} \sin(k\omega x) \qquad \omega = \frac{\pi}{L}$$

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\omega x) \overset{!}{=} u_0(x)$$ Wenn möglich Koeffizientenvergleich

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin(k\omega x)\, dx$$ falls Koeff'nvergleich nicht möglich

II) ARWA, inhomogen, homogene Randwerte :

$$u_t - cu_{xx} = h(x,t), \qquad x \in (0,L),\ t > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in (0,L)$$

$$u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0 \qquad t > 0$$

III) ARWA, inhomogene Randwerte:

$$u_t - c\tilde{u}_{xx} = h(x,t), \qquad \tilde{}x \in (0,L),\ t > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in (0,L)$$

$$u(0,t) = f(t) \qquad u(L,t) = g(t) \qquad t > 0$$

Randwerte homogenisieren

$$v(x,t) = u(x,t) - f(t) - \frac{x}{L}(g(t) - f(t))$$

ergibt neue Aufgabe für v mit homogenen Randwerten.

Falls neue Dgl. homogen : Typ I).
Falls neue Dgl. inhomogen : Typ II).

Potentialgleichung bzw. Laplace Gleichung

Allgemeiner Ansatz:

$$\boxed{u(r,\phi) = c_0 + d_0 \ln(r) + \sum_k (c_k r^{-k} + d_k r^k)(a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi))}$$

Wenn $r = 0$ zum Gebiet gehört ln und negative $r-$Potenzen steichen.

Wenn $\lim_{r\to\infty}$ im Gebiet: $\ln$ und positive $r-$Potenzen streichen.

Dann vorgegebene Randdaten in den Ansatz einsetzen.

Beispiele:

Charakteristikensteigung unabhängig von u:

$$\begin{aligned} u_t + 2xu_x &= -tu, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= \cos(x)e^{-x}. \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2x \quad \Longrightarrow \frac{dx}{x} = 2dt$$

Also $x(t) = c_1 e^{2t}$ und $c_1 = xe^{-2t}$.

Auf den Charakteristiken gilt $\dfrac{du}{dt} = -tu$

$$\frac{du}{dt} = -tu \quad \Longrightarrow \frac{du}{u} = -tdt$$

Also $u = c_2 e^{-\frac{t^2}{2}}, \qquad c_2 = u \cdot e^{\frac{t^2}{2}}$.

Setze $c_2 = f(c_1)$:

$$u \cdot e^{\frac{t^2}{2}} = f(xe^{-2t}) \iff u = e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot f(xe^{-2t})$$

Jetzt f bestimmen mit den Anfangswerten, also $t = 0$:

$$u(x, 0) = e^{-\frac{0^2}{2}} \cdot f(xe^{-2\cdot 0}) \stackrel{!}{=} \cos(x)e^{-x}$$

Burgers und ähnliche Gleichung mit nicht stetigen Anfangsdaten

Gesucht: Entropielösung (Viskositätslösung) der Burger's Gleichung $u_t + uu_x = 0$ für $0 < t < t^*$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & x \leq 1, \\ 2 & 1 < x \leq 3, \\ 0 & 3 < x. \end{cases}$$

Hier ist eventuell eine Zeichnung hilfreicher als rechnen.

Im Pkt $(1,0)$ entwickelt sich Verdünnungswelle

$$u(x,t) = \frac{x - x(0)}{t}.$$

Im Pkt $(3,0)$ entwickelt sich Stoßwelle mit Geschwindigkeit

$$\dot{s}(t) = \frac{0+2}{2} = 1.$$

$$s(t) =$$

Es gilt zunächst (bis Stoß- und Verdünnungswelle aufeinander treffen)

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & x \leq 1, \\ \dfrac{x-1}{t} & 1 < x \leq 1+2t, \\ 2 & 1+2t < x < 3+t, \\ 0 & 3+t < x\cdot \end{cases}$$

Die Stoßwelle trifft auf die Verdünnungswelle, wenn
$1 + 2t \ = \ 3 + t$

Zwei Verdünnungswellen

Zwei Stoßwellen