

8.1 Die Methode der Finiten–Differenzen

Wir beschränken uns auf **eindimensionale** Probleme und die folgenden Anfangs– und Anfangsrandwertprobleme

1) Cauchy–Probleme für **skalare Erhaltungsgleichungen**, also

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

2) Randwertprobleme für die **Poissongleichung**, also

$$\begin{cases} -u_{xx} = f(x) & : 0 < x < 1, 0 < t \leq T \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

3) Anfangsrandwertprobleme für die **Wärmeleitungsgleichung**, also

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t) & : 0 < x < 1, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

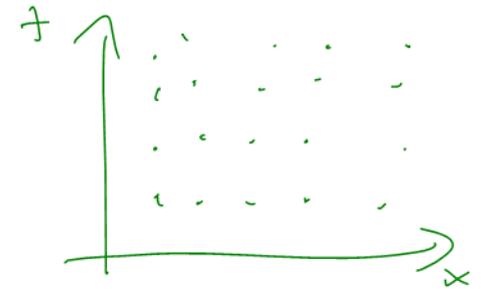
Idee bei Finiten–Differenzen:

Approximiere die exakte Lösung **nur** an diskreten Punkten (**dem Gitter**):

$$u(x_i, t_j) \approx U(x_i, t_j) =: U_i^j$$

mit den diskreten Punkten

$$x_i := i \cdot h, \quad i \in \mathcal{Z}_x, \quad t_j := j \cdot k, \quad j \in \mathcal{Z}_t$$



und den **Orts– und Zeitschrittweiten** h und k . Die Indexmengen \mathcal{Z}_x und \mathcal{Z}_t sind dabei endliche oder unendliche Teilmengen von \mathcal{Z} .

Beispiel: Für die Wärmeleitungsgleichung auf $[0, 1] \times [0, T]$ setzen wir

$$x_i := i \cdot h, \quad i = 0, \dots, n$$

$$t_j := j \cdot k, \quad j = 0, \dots, m$$

mit den Orts– und Zeitschrittweiten

$$h := \frac{1}{n}, \quad k := \frac{T}{m}$$

Zur Berechnung der diskreten Werte U_i^j benötigen wir die Approximation von Ableitungen:

Beispiel:

Wir approximieren die Ableitung $u_x(x, t)$ an der Stelle $(x, t) = (x_i, t_j)$:

1) **Zentrale Differenzen**

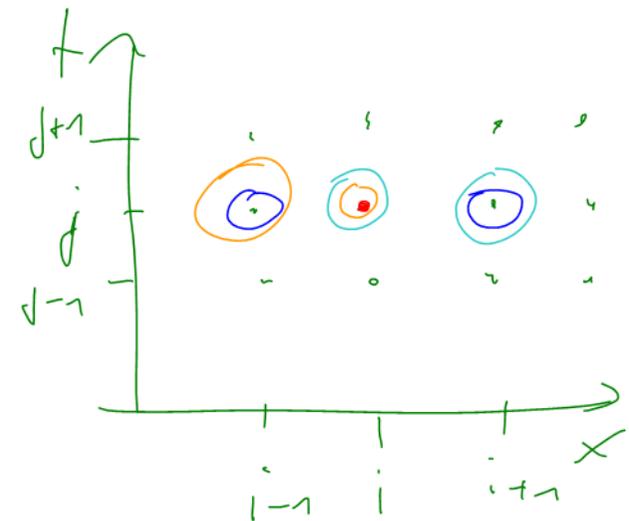
$$u_x(x_i, t_j) \approx \frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2h}$$

2) **Vorwärtsdifferenz**

$$u_x(x_i, t_j) \approx \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{h}$$

3) **Rückwärtsdifferenz**

$$u_x(x_i, t_j) \approx \frac{U_i^j - U_{i-1}^j}{h}$$



Approximationsgüte von Finiten-Differenzen

Sei $u(x, t)$ eine hinreichend oft differenzierbare Funktion und (x_i, t_j) ein fester Punkt eines Gitters mit Orts- und Zeitschrittweite h und k .

Mittels einer Taylorentwicklung um (x_i, t_j) erhalten wir

$$\underbrace{u(x_{i+1}, t_j)}_{u_{i+1}^j} = \underbrace{u(x_i, t_j)}_{u_i^j} + u_x(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{=h} + \frac{1}{2} u_{xx}(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i+1} - x_i)^2}_{=h^2} + \frac{1}{6} u_{xxx}(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i+1} - x_i)^3}_{=h^3} + \dots$$

$$\underbrace{u(x_{i-1}, t_j)}_{u_{i-1}^j} = \underbrace{u(x_i, t_j)}_{u_i^j} + u_x(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i-1} - x_i)}_{=-h} + \frac{1}{2} u_{xx}(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i-1} - x_i)^2}_{=h^2} + \frac{1}{6} u_{xxx}(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i-1} - x_i)^3}_{=-h^3} + \dots$$

Wir erhalten damit

1) bei **Zentralen Differenzen**

$$\left| u_x(x_i, t_j) - \frac{u(x_{i+1}, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{2h} \right| = O(h^2)$$

⇒ Approximation **zweiter** Ordnung in h .

2) bei **Vorwärtsdifferenzen**

$$\left| u_x(x_i, t_j) - \frac{u(x_{i+1}, t_j) - u(x_i, t_j)}{h} \right| = O(h)$$

⇒ Approximation **erster** Ordnung in h .

3) bei **Rückwärtsdifferenzen**

$$\left| u_x(x_i, t_j) - \frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{h} \right| = O(h)$$

⇒ Approximation **erster** Ordnung in h .

Finite-Differenzen für skalare Erhaltungsgleichungen

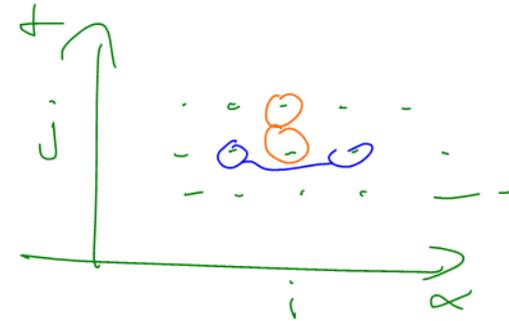
Wir betrachten das Cauchy-Problem

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k} \rightarrow \begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

$$\frac{f(u_{i+1}^j) - f(u_{i-1}^j)}{2h}$$

Mit den Notationen von oben ist ein numerisches Verfahren mit Hilfe von Finiten-Differenzen gegeben durch

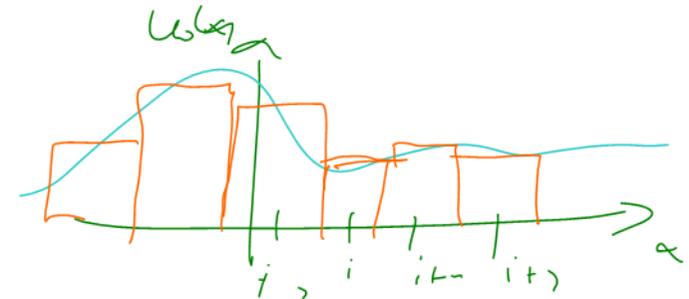
$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{k}{2h} (f(U_{i+1}^j) - f(U_{i-1}^j))$$



mit den Anfangsbedingungen

$f = 0$ Zeitlevel

$$U_i^0 = \frac{1}{h} \int_{x_i - h/2}^{x_i + h/2} u_0(x) dx$$



Also: Zentrale Differenz im Ort, Vorwärtsdifferenz in der Zeit.

Beispiel: Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : x \leq 0 \\ -1 & : x > 0 \end{cases}$$

Sprungkurve

Die Anfangsbedingung ist gleichzeitig die Lösung für $t > 0$!

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{k}{2h} \left(\frac{(U_{i+1}^j)^2}{2} - \frac{(U_{i-1}^j)^2}{2} \right)$$

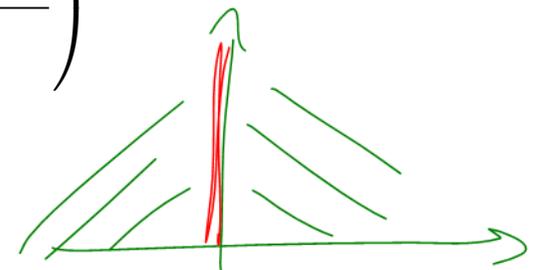
$$U_i^0 = \begin{cases} 1 & : i < 0 \\ 0 & : i = 0 \\ -1 & : i > 0 \end{cases}$$

$$u u_x = \left(\frac{u^2}{2} \right)'$$

$$f(u_1) = \frac{u^2}{2}$$

$$s = \frac{f(u_1) - f(u_2)}{u_1 - u_2} =$$

$$= \frac{1}{2} (u_1 + u_2) = 0$$



Fazit: Funktioniert nicht, Verfahren ist **instabil**

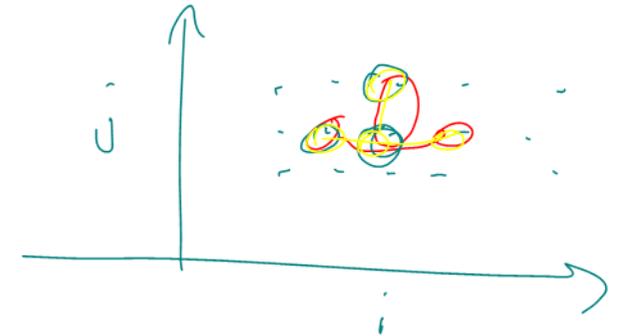
Beispiel: Wir betrachten die lineare Advektionsgleichung

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

$f(u) = u$

Zentrale Differenzen im Ort:

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{k}{2h} (U_{i+1}^j - U_{i-1}^j)$$



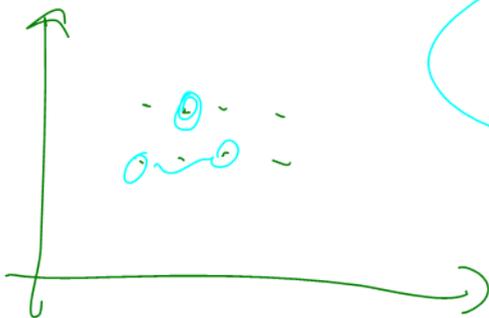
Funktioniert selbst bei einer linearen Gleichung nicht!

Upwind-Verfahren: funktioniert unter der CFL-Bedingung $k/h < 1$

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{k}{h} (U_i^j - U_{i-1}^j)$$

Lax-Friedrichs-Verfahren: funktioniert wie das Upwind-Verfahren

$$U_i^{j+1} = \frac{U_{i+1}^j + U_{i-1}^j}{2} - \frac{k}{2h} (U_{i+1}^j - U_{i-1}^j)$$



$\approx u_f$

Zentrale Diff.

$$\begin{pmatrix} u_{i-1}^{j+1} \\ u_i^{j+1} \\ u_{i+1}^{j+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \begin{matrix} 1 & -\varrho \\ \varrho & 1 \end{matrix} & -\varrho \\ \vdots & \begin{matrix} A_2 & \varrho & 1 & -\varrho \end{matrix} \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ u_{i-1}^j \\ u_i^j \\ u_{i+1}^j \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$(j+1)$ Zeitlevel

j Zeitlevel

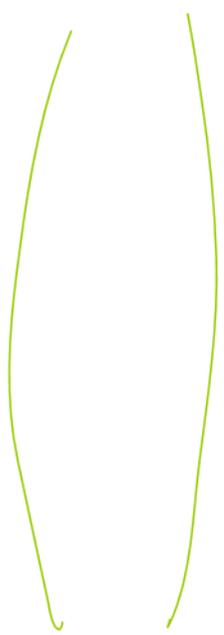
$$u^j = A u^{j-1} = A^2 u^{j-2} = \dots = A^j u^0$$

$$\det(A_2 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\varrho \\ \varrho & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + \varrho^2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm i\varrho$$

$$|\lambda_{1,2}| = \sqrt{1 + \varrho^2} > 1 \quad \text{!}$$

instabil

Upward



=

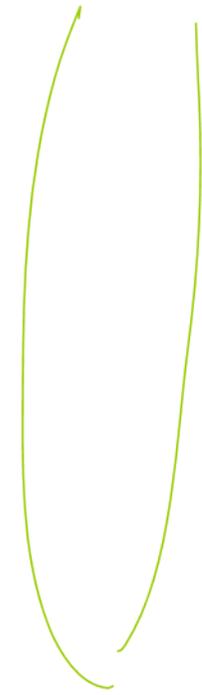


$$\begin{array}{cc} 1-2a & 2a \\ 1-2a & 2a \end{array}$$

A_2

$2a$

$1-2a$ $2a$



$$\lambda_{1/2} = 1-2a$$

$$|\lambda_{1/2}| < 1 \quad \left(\text{falls } 0 \leq a < \frac{1}{2} \right)$$

Finite-Differenzen für die Poissongleichung

Wir betrachten jetzt Randwertprobleme für die **Poissongleichung**, also

$$\begin{cases} -u_{xx} = f(x) & : 0 < x < 1, \cancel{0 \leq x \leq 1} \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Zunächst benötigen wir eine Approximation der zweiten Ableitung:

$$u_{xx}(x_i) \approx \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} = \frac{\frac{U_{i+1} - U_i}{h} - \frac{U_i - U_{i-1}}{h}}{h}$$

Damit erhalten wir die diskreten Gleichungen

$$\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} = F_i, \quad i = 1, \dots, n-1$$

mit $h = 1/n$ und

$$F_i := f(x_i), \quad U_0 = U_n = 0$$

Setzen wir

$$\mathbf{x} = (U_1, \dots, U_{n-1})^T, \quad \mathbf{b} = (F_1, \dots, F_{n-1})^T$$

so erhalten wir das **lineare Gleichungssystem**

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

mit der Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Fazit:

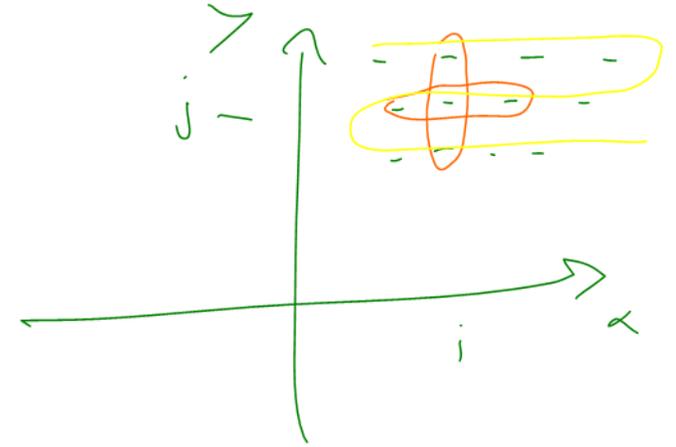
Die numerische Lösung der Poissongleichung reduziert sich auf ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten U_1, \dots, U_{n-1} .

$0/2$

$$u_{xx} + u_{yy} = f$$

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2h} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{2h} = f(x_{i,j})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$$



Finite-Differenzen für die Wärmeleitungsgleichung

Zur numerischen von Anfangsrandwertproblemen der Form

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & : 0 < x < 1, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

müssen wir Diskretisierungen für die zweite Ableitung u_{xx} mit einer Differenzenapproximation für die Zeitableitung u_t kombinieren:

1) Setzen wir eine Vorwärtsdifferenz an, also

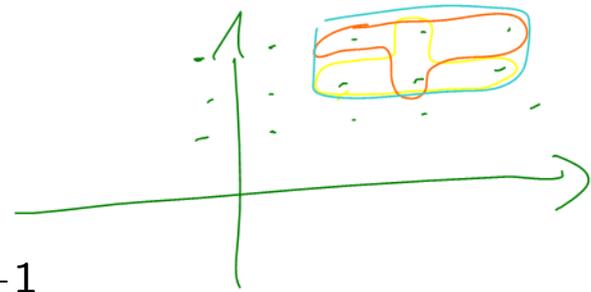
$$u_t(x_i, t_j) = \frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k}$$

so erhalten wir das **explizite Verfahren**

$$U_i^{j+1} = U_i^j + \frac{k}{h^2} (U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j)$$

2) Mit der Rückwärtsdifferenz

$$u_t(x_i, t_j) = \frac{U_i^j - U_i^{j-1}}{k}$$



erhalten wir das implizite Verfahren

$$U_i^{j+1} = U_i^j + \frac{k}{h^2} (U_{i+1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1})$$

Fazit: Zur Berechnung der Lösung zur Zeit t_{j+1} muß ein lineares Gleichungssystem gelöst werden!

3) Eine Konvexkombination beider Verfahren liefert die θ -Methode

$$U_i^{j+1} = U_i^j + \frac{k}{h^2} [\theta (U_{i+1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1}) + (1 - \theta) (U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j)]$$

Im Fall $\theta = \frac{1}{2}$ erhält man das Crank–Nicholson–Verfahren.

Bemerkungen:

- 1) Das explizite Verfahren funktioniert nur unter der Bedingung:

$$\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

Man nennt diese Bedingung eine **Stabilitätsbedingung**.

Verdoppelt man also die Zahl der Gitterpunkte im Ort, muß man entsprechend mit einem vierfach kleineren Zeitschritt arbeiten.

- 2) Das implizite Verfahren ist für alle Werte von k und h stabil.

Zur Berechnung der Lösung muß man allerdings in jedem Zeitschritt ein lineares Gleichungssystem lösen.

- 3) Bei Verfahren sind erster Ordnung in der Zeit und zweiter Ordnung im Ort, d.h. für den Fehler $e(T)$ zwischen der exakten und der numerischen Lösung zu einer festen Zeit $T > 0$ gilt:

$$e(T) = O(k) + O(h^2)$$

Bemerkungen: (Fortsetzung)

4) Die Stabilitätsbedingung für die θ -Methode für $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ lautet

$$\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}(1 - 2\theta)^{-1}$$

Für $\theta \geq \frac{1}{2}$ ist die θ -Methode stets stabil.

5) Das Verfahren von Crank–Nicholson ist zweiter Ordnung in Ort **und** Zeit, d.h. es gilt

$$e(T) = O(k^2) + O(h^2)$$

Für keinen anderen Wert von θ gilt ein entsprechendes Resultat.

Daher ist das Verfahren von Crank–Nicholson ein spezielles Verfahren für die Wärmeleitungsgleichung und wird häufig bei numerischen Berechnungen verwendet.

8.1 Die Methode der Finiten–Elemente

Wir beschränken uns auf das **eindimensionale Randwertproblem**:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) = f(x), & 0 < x < l, \quad k(x) > 0 \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases}$$

FE–Methoden basieren auf drei grundlegenden Ideen:

- 1) Man reformuliert das gegebene Problem in einer **schwachen Form** oder auch **Variationsformulierung**. Dadurch reduziert sich das Problem auf unendlich viele algebraische Gleichungen in einem Vektorraum, dessen Elemente bereits die vorgegebenen Randwerte erfüllen.
- 2) Die **Galerkin Methode** reduziert das Problem auf Gleichungen in einem **endlich–dimensionalen** Finite–Element–Raum, der eine endliche Zahl von Basiselementen besitzt.

- 3) Als Basis des endlich-dimensionalen FE-Raums wählt man **stückweise Polynome** und erhält damit ein lineares Gleichungssystem mit einer **dünn besetzten** Koeffizientenmatrix.

Die schwache Form des Randwertproblems

Sei V gegeben durch

$$V = \{v \in C^2[0, l] : v(0) = v(l) = 0\}$$

Wir multiplizieren nun die gegebene Poissongleichung mit einer Funktion $v \in V$ und integrieren über den Ortsraum $[0, l]$:

$$-\int_0^l \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) v(x) dx = \int_0^l f(x) v(x) dx$$

Mittels partieller Integration erhalten wir

$$+\int_0^l k(x) \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) dx = \int_0^l f(x) v(x) dx$$

Da $v \in V$ eine beliebige Funktion ist, lautet die schwache Form:

Finde ein $u \in V$, sodass die Beziehung

$$\int_0^l k(x) \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) dx = \int_0^l f(x)v(x) dx$$

für alle $v \in V$ erfüllt ist.

Man kann nun zeigen:

Erfüllt $u \in V$ die Differentialgleichung

$$-\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) = f(x),$$

so erfüllt u auch die schwache Form von oben, und **wichtiger**, es gilt ebenfalls die **Umkehrung**.

Fazit: Beide Darstellungen sind also äquivalent.

Die Galerkin–Methode

Definieren wir

$$a(u, v) := \int_0^l k(x) \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) dx$$

so ist $a(\cdot, \cdot)$ eine **symmetrische Bilinearform**, die ein inneres Produkt im Vektorraum V darstellt.

Mit Hilfe der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ und dem Skalarprodukt

$$(f, v) = \int_0^l f(x) v(x) dx$$

läßt sich die schwache Form folgendermaßen schreiben:

finde ein $u \in V$, sodass $a(u, v) = (f, v)$ für alle $v \in V$ gilt

Die Idee der Galerkinmethode ist nun den Vektorraum V durch einen endlich-dimensionalen Raum V_n , den sogenannten **Finite-Element-Raum**, zu approximieren und dort folgendes Problem zu lösen:

finde ein $v_n \in V_n$, sodass $a(v_n, v) = (f, v)$ für alle $v \in V_n$ gilt

Dieses Problem läßt sich auf ein lineares Gleichungssystem reduzieren:

Sei $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$ eine Basis von V_n . Dann besitzt die Lösung v_n die Darstellung

$$v_n = \sum_{j=1}^n u_j \Phi_j$$

Setzen wir dies in die schwache Form ein, so gilt:

$$a \left(\sum_{j=1}^n u_j \Phi_j, \Phi_i \right) = (f, \Phi_i), \quad i = 1, \dots, n$$

Aufgrund der Bilinearität von $a(\cdot, \cdot)$ folgt

$$\sum_{j=1}^n a(\Phi_j, \Phi_i) u_j = (f, \Phi_i), \quad i = 1, \dots, n$$

Setzen wir für $i = 1, \dots, n$

$$a_{ij} = a(\Phi_j, \Phi_i), \quad f_i = (f, \Phi_i),$$

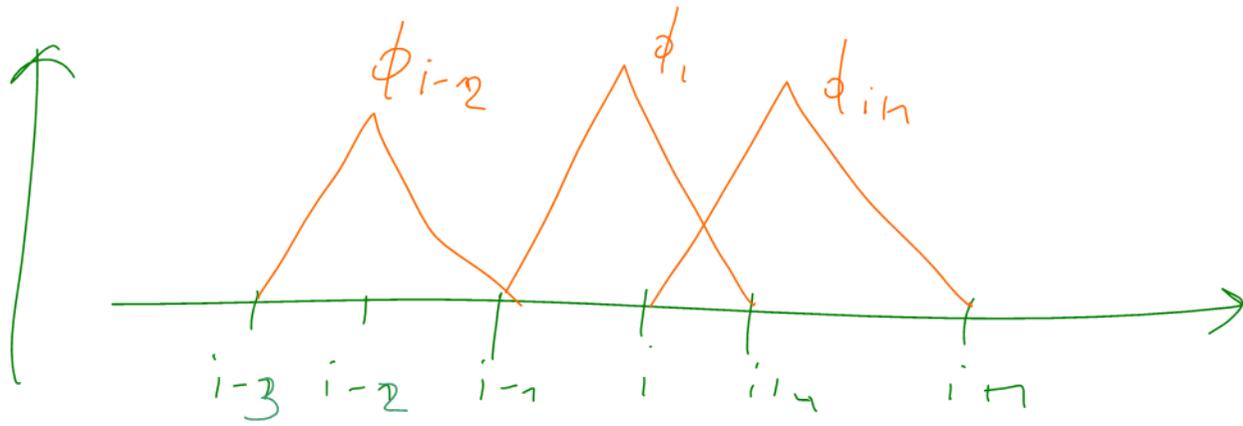
so ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

mit der **Steifigkeitsmatrix** \mathbf{A} und dem Lösungsvektor

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$$

mit den zu bestimmenden Koeffizienten u_1, \dots, u_n .



$$-\Delta u = f$$

$$a(\phi_i, \phi_j) = \int_0^l \phi_{i,x} \phi_{j,x} dx$$

.....

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & \dots \end{pmatrix}$$

Approximation der stückweise Polynome

Zur Konstruktion von FE-Räumen machen wir folgende Vorüberlegungen:

- 1) Am besten wären FE-Räume V_n , für die man eine Orthogonalbasis aufstellen kann. Dann wäre die Steifigkeitsmatrix eine Diagonalmatrix. Dies ist aber im Allgemeinen nicht möglich.
- 2) Findet man keine Orthogonalbasis, so sollten Steifigkeitsmatrix und die rechte Seite **einfach** zu berechnen sein.
- 3) Die Basis von V_n sollte **fast** orthogonal sein, denn dann wäre die Steifigkeitsmatrix nahe bei einer Diagonalmatrix und damit **dünn besetzt**.
- 4) Die exakte Lösung u des Problems sollte **möglichst gut** durch ein Element aus V_n approximiert werden können und im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ sollte die Approximation **beliebig gut** werden.

Daher: Approximation durch stückweise Polynome, zum Beispiel durch eine stückweise **lineare** Funktion.