5.2 Die Fundamentallösung

Definition:

Die Funktion

$$\Phi(\mathbf{x},t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4t}} & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0) \\ 0 & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t < 0) \end{cases}$$

heißt Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung.

Insbesondere ist die Fundamentallösung **normiert**, d.h. für alle $t > 0$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)dx = 1$$

Bemerkung:

Die Fundamentallösung besitzt für $t = 0$ und $\mathbf{x} = 0$ eine Singularität.

Mit Hilfe von $\Phi(x,t)$ lässt sich für das **Cauchy–Problem**

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$$

eine Lösungsdarstellung wieder in der Form eines Faltungsintegral angeben:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x},t) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4t}} g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \end{aligned}$$

Herleitung der Fundamentallösung (nur für $x \in \mathbb{R}$):

Ist $u(x,t)$ eine Lösung von $u_t = \Delta u$, so ist $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung.

$\tilde{u}(x,t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$

$\tilde{u}_t - \Delta \tilde{u} = \lambda^2 u_t - \lambda^2 \Delta u = \lambda^2 (u_t - \Delta u) = 0$

$\frac{(\lambda x)^2}{(\lambda^2 t)} = \frac{x^2}{t}$ also ist $\frac{x}{\sqrt{t}}$ besonders

Ansatz suche Lsg, die nur von $\frac{x}{\sqrt{t}}$ abhängen

Ansatz:

Wir suchen daher eine spezielle Lösung in der Form

$$u(x,t) = \frac{1}{t^{1/2}} v\left(\frac{x}{t^{1/2}}\right)$$

Man berechnet nun

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= -\frac{1}{2} t^{-3/2} \cdot v - \frac{x}{2} \cdot t^{-3/2} \cdot t^{-1/2} v' \\ u_x(x,t) &= t^{-1/2} \cdot t^{-1/2} \cdot v' \\ u_{xx}(x,t) &= t^{-3/2} \cdot v'' \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$u_t - u_{xx} = -\frac{1}{2} \cdot t^{-3/2} \cdot v - \frac{x}{2} \cdot t^{-2} \cdot v' - t^{-3/2} \cdot v'' = 0$$

$$x \cdot t^{-2} = \frac{x}{\sqrt{t}} \cdot t^{-3/2}$$

Wir erhalten also mit $\boxed{r = x/\sqrt{t}}$ die Gleichung zweiter Ordnung

$$\underbrace{\frac{1}{2}v + \frac{r}{2}v'}_{\frac{1}{2}(rv)'} + v'' = 0$$

Umschreiben ergibt

$$(v')' + \frac{1}{2}(rv)' = 0 \quad \Rightarrow \quad \underset{\xrightarrow{r\to\infty} 0}{v'} + \frac{1}{2}\underset{\xrightarrow{r\to\infty} 0}{rv} = c \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow c = 0$$

Nehmen wir nun folgende Grenzbeziehungen an

$$\lim_{r\to\infty} v(r) = \lim_{r\to\infty} v'(r) = 0$$

so folgt $c = 0$ und die Gleichung lautet

$(\ln v)' = \frac{v'}{v} = -\frac{1}{2}r$

$$v' = -\frac{1}{2}rv \quad \Rightarrow \quad v(r) = be^{-r^2/4}$$

Eine explizite Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung ist damit

b so wählen, dass

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

$\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,dx = 1$

Weitere **Lösungsdarstellungen** mit Hilfe der Fundamentallösung:

1) Das inhomogene Anfangswertproblem mit homogenen Anfangsbedingungen

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

$f = f(x,t)$

besitzt die Lösung

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x},t) &= \int_0^t \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t-s) f(\mathbf{y},s)\, d\mathbf{y}}_{u(x,t;s)}\, ds \\ &= \int_0^t \overbrace{\frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4(t-s)}} f(\mathbf{y},s)\, d\mathbf{y}}^{u(x,t;s)}\, ds \end{aligned}$$

$$u(x,t) = \int_0^t u(x,t;s)\,ds$$

$$u_t = \int_0^t u_t(x,t;s)\,ds + u(x,t;t)$$

$$\Delta_x u = \int_0^t \Delta u(x,t;s)\,ds$$

$$\boxed{u_t - \Delta u} = \int_0^t \underbrace{[u_t(x,t;s) - \Delta u(x,t;s)]}_{=0}\,ds + \underbrace{u(x,t;t)}_{f(x,t)} \boxed{= f(x,t)}$$

$$\boxed{u(x,0) = \int_0^0 \ldots\,ds = 0}$$

$$u_t - \Delta u = f \qquad u^h_t - \Delta u^h = 0 \qquad u^i_t - \Delta u^i = f$$

$$u = g \quad t=0 \qquad u = g \qquad u = 0$$

$$u = u^h + u^i$$

weil Gl. linear!

1) **Duhamel'sches Prinzip:**

Die Funktion $u(\mathbf{x}, t; s) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t-s) f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y}$ löst das Problem

$$\begin{cases} u_t(\cdot\,; s) - \Delta u(\cdot\,; s) &= 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (s, \infty) \\ u(\cdot\,; s) &= f(\cdot\,; s) & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = s\} \end{cases}$$

$u(x,s;s) = f(x,s)$

Man erhält dann die Lösung der inhomogenen Gleichung durch Integration über s:

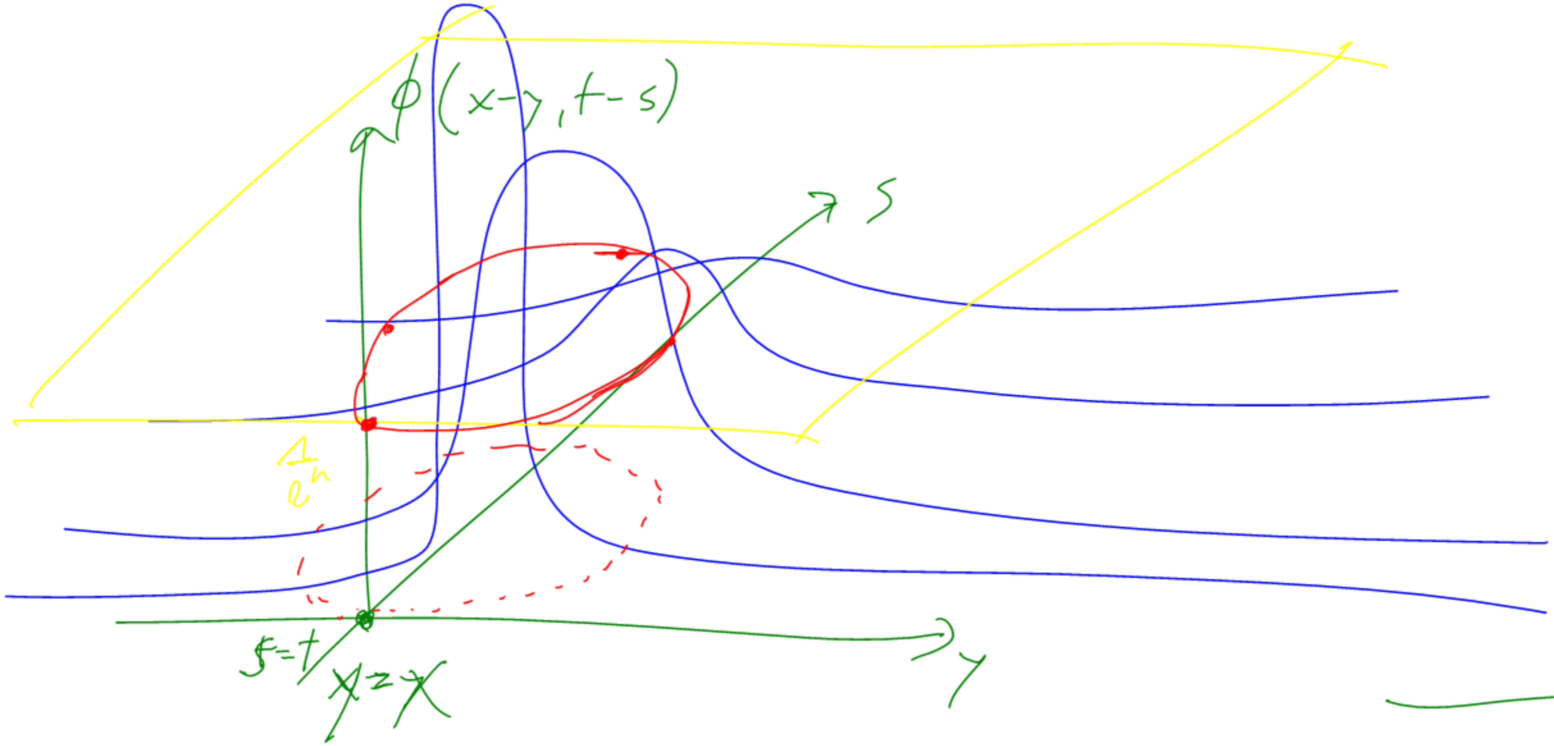
$$u(\mathbf{x}, t) = \int\limits_0^t u(\mathbf{x}, t; s)\, ds$$

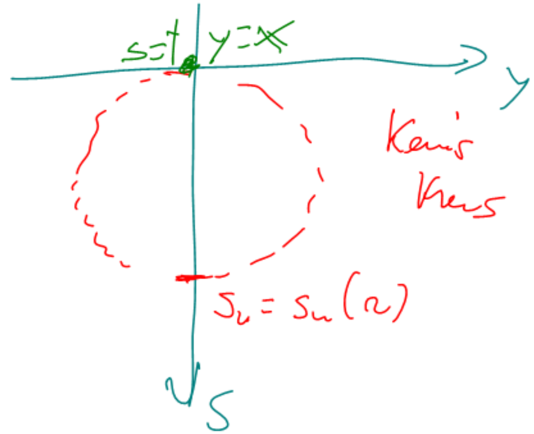
2) Das inhomogene Anfangswertproblem mit allgemeinen Anfangsbedingungen $u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x})$ besitzt die Lösung

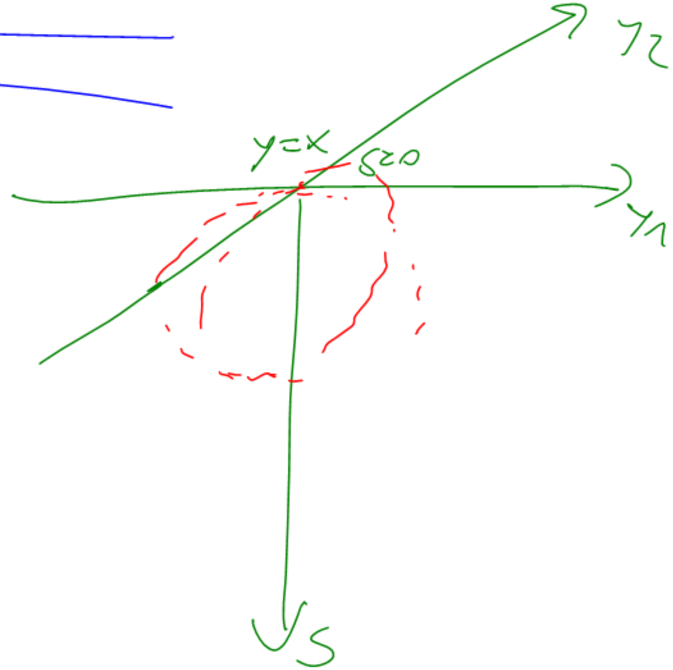
$$\boxed{\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \\ u &= g \end{aligned}}$$

$$u(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y}}_{u^h} + \underbrace{\int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t-s) f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y}\, ds}_{u^i}$$

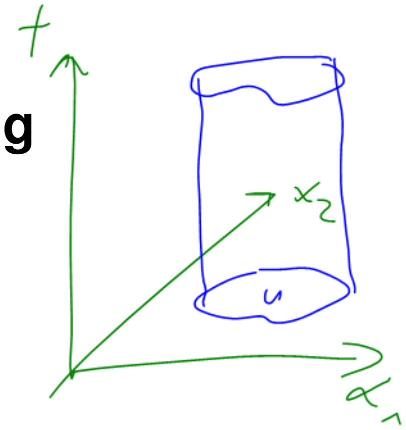
$$E(x,t;r) = \left\{ (y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; s \le t,\ \phi(x-y,t-s) \ge \frac{1}{r^n} \right\}$$







5.3 Eigenschaften von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung



Analog zur Laplacegleichung erfüllen auch Lösungen der Wärmeleitungsgleichung **Mittelwertformeln**, die allerdings weniger anschaulich sind:

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $T > 0$ fest. Dann nennt man die Menge

$$U_T := U \times (0, T]$$

Innere + Deckel

den **parabolischen Zylinder** und

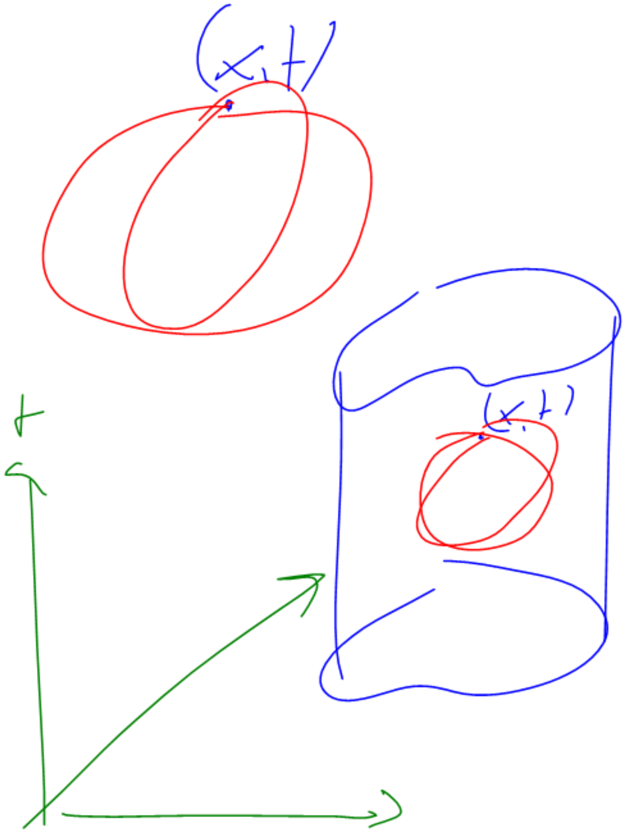
$$\Gamma_T := \overline{U_T} \setminus U_T$$

Boden (Anfangsbed.) + Mantel (Randbed.)

den **parabolischen Rand**.

Für festes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ sei die Menge $E(\mathbf{x}, t; r)$ gegeben durch

$$E(\mathbf{x}, t; r) := \{(\mathbf{y}, s) \in \mathbb{R}^{n+1} \;:\; s \leq t,\ \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \geq \frac{1}{r^n}\}$$



nicht möglich

Bemerkung:

1) Der Rand von $E(\mathbf{x}, t; r)$ ist gerade eine Höhenlinie der Fundamentallösung $\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s)$.

2) Man nennt die Menge $E(\mathbf{x}, t; r)$ auch **Wärmekugel** (heat ball).

Mit Hilfe von $E(\mathbf{x}, t; r)$ erhält man folgende **Mittelwerteigenschaft**:

Satz:

in x $\qquad$ $u_t - \Delta u = 0$ $\qquad$ (x, t)

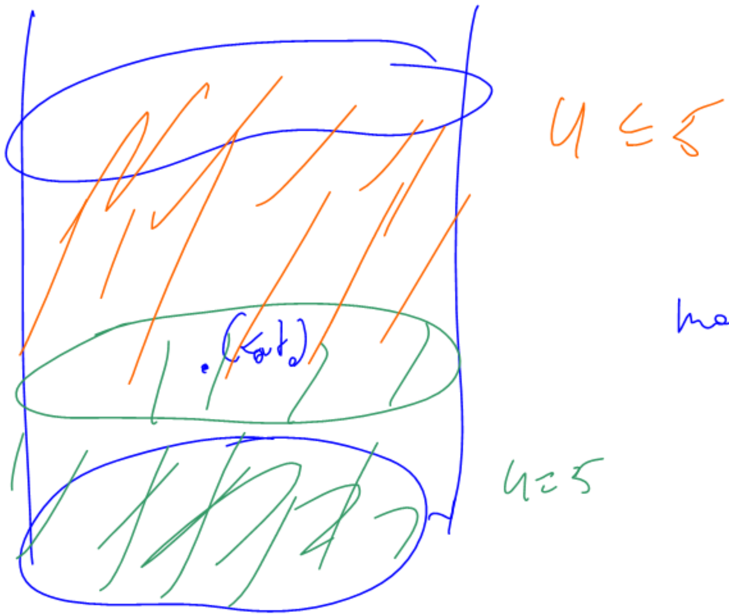
Ist $u \in C_1^2(U_T)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, so gilt

in t

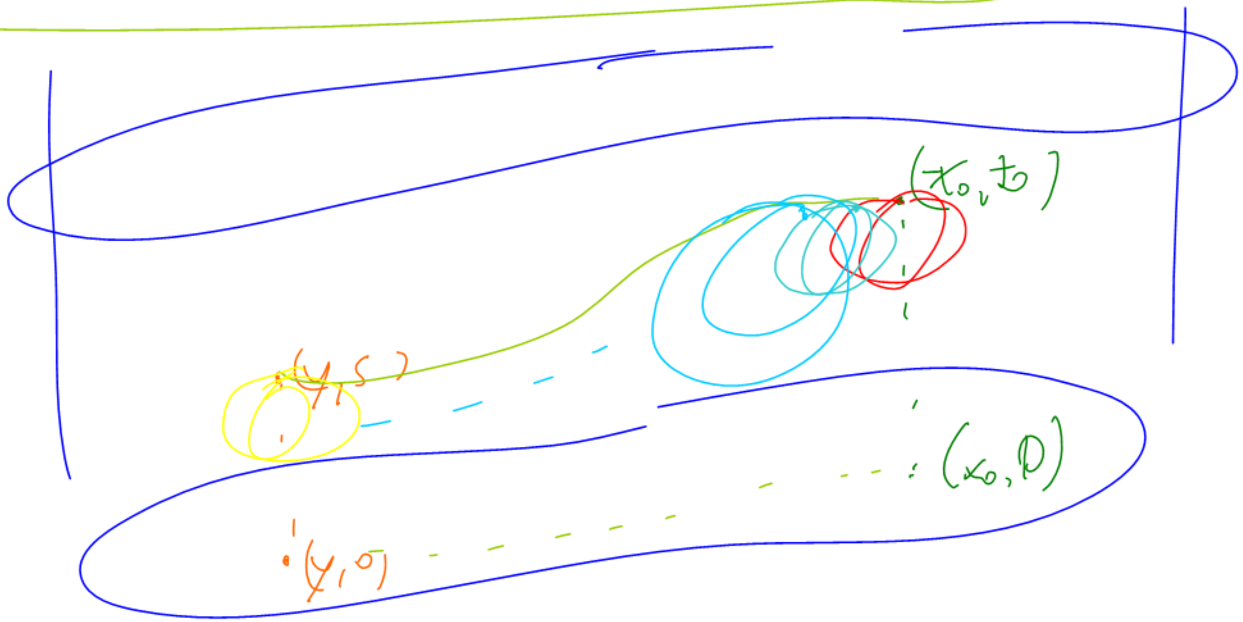
$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4r^n} \int_{E(\mathbf{x},t;r)} \underbrace{\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{(t - s)^2}}_{\text{Gewicht}} u(\mathbf{y}, s) \, d\mathbf{y} ds$$

gewichtete Mittelung

für jede Menge $E(x, t; r) \subset U_T$.



$$\max u(x,t) = u(x_0,t_0) = 5$$



Aus der Mittelwerteigenschaft kann man folgende Maximumprinzipien herleiten.

Satz:

$u_t - \Delta u = 0$

Sei $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U}_T)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung in U_T. Dann gilt

1) Das Maximum von $u(\mathbf{x}, t)$ liegt stets auf dem parabolischen Rand, d.h.

$$\max_{(\mathbf{x},t)\in\overline{U}_T} u(\mathbf{x}, t) = \max_{(\mathbf{x},t)\in\Gamma_T} u(\mathbf{x}, t)$$

2) Ist U zusammenhängend und existiert ein Punkt $(\mathbf{x}_0, t_0) \in U_T$ mit

$$u(\mathbf{x}_0, t_0) = \max_{(\mathbf{x},t)\in\overline{U}_T} u(\mathbf{x}, t)$$

so folgt, dass u auf $\overline{U}_{t_0}$ konstant ist.

Eindeutigkeit von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung:

Satz:

Das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } U_T \\ u = g & \text{auf } \Gamma_T \end{cases}$$

auf dem beschränkten Gebiet U mit stetigen Funktionen f und g besitzt maximal eine Lösung $u \in \mathcal{C}_1^2(U_T) \cap \mathcal{C}(\overline{U_T})$.

Beweis:

Sind u und $\tilde{u}$ zwei Lösungen, so lösen die beiden Funktionen

$$w_{1/2,t} - \Delta w_{1/2} = 0$$

$$w_{1/2} = 0$$

$$w_{1/2} = \pm(u - \tilde{u}) \quad \text{linear}$$

die homogene Wärmeleitungsgleichung mit homogenen Randbedingungen. Nach dem Maximumprinzip gilt dann, dass $w_{1/2}$ identisch verschwinden, d.h. wir haben $u = \tilde{u}$.

Energiemethode

$$\left.\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \\ u &= g \end{aligned}\right\} \quad \text{Annahme } u_1, u_2 \text{ Lsg} \qquad w = u_1 - u_2$$

$$\left.\begin{aligned} w_t - \Delta w &= 0 \\ w &= 0 \end{aligned}\right\}$$

"Energie" $e(t) = \int_U w^2(x,t)\,dx$

$$\frac{de}{dt} = \int_U 2 w w_t \,dx \overset{\text{Lsg}}{=} 2\int_U w \Delta w \,dx = -2\int_U \nabla w \cdot \nabla w \,dx + \cancel{2\int_{\partial U} \underbrace{w}_{=0} \frac{\partial w}{\partial n}\,dS} \le 0$$

auf Rand

$$e(0) = \int_U w^2(x,0)\,dx = 0$$

Boden

$$0 \le e(t) \le e(0) = 0$$

$\Rightarrow e(t) \equiv 0 \Rightarrow w(x,t) = 0$

Allgemein

$$\left.\begin{aligned} u_t &= \Delta u - u + f \\ u &= g \end{aligned}\right\}$$

$e(t) = \int w^2\,dx \qquad e(0) = 0$

$$\dot e(t) = 2\int_U w w_t \,dx = 2\int_U w(\Delta w - w)\,dx = -2\int_U \left(|\nabla w|^2 + w^2\right)dx + \cancel{\int_{\partial U} w \frac{\partial w}{\partial n}\,dS} \le 0$$

noch allgemeiner $\dot e(t) \le e(t)$