Suche spezielle Lsgen.

Radialsymmetrisch

$n=2$ $$\Delta u = \frac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r u\right) + \cancel{\frac{1}{r^2}\partial_{\varphi\varphi} u} = 0$$

$n=3$ $$\Delta u = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r u\right) + \text{Terme}\cancel{\left(\partial_\varphi, \partial_\theta, \partial_{\varphi\varphi}, \partial_{\theta\theta}\right)} = 0$$

$n=4$ $$\Delta u = \frac{1}{r^3}\partial_r\left(r^3\partial_r u\right) + \text{Terme}\cancel{\left(\partial_\varphi, \partial_\theta, \partial_\xi, \partial_{\varphi\varphi}, \dots\right)} = 0$$

Kapitel 4: Die Laplacegleichung

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Laplacegleichung

$\cancel{u_t} = \Delta u$
$\cancel{u_{tt}} = \Delta u$ stationär $\longrightarrow$

$$\Delta u = 0, \qquad u = u(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}$$

und der zugehörigen Poissongleichung

$\cancel{u_t} = \Delta u + f$
$\cancel{u_{tt}} = \Delta u + f$ stationär $\longrightarrow$

$$-\Delta u = f$$

mit vorgegebener rechten Seite $f = f(\mathbf{x})$.

Definition:

Eine $\mathcal{C}^2$–Funktion $u = u(\mathbf{x})$, die die Laplacegleichung erfüllt, d.h. es gilt

$$\Delta u = 0,$$

nennt man eine **harmonische Funktion**.

4.1 Die Fundamentallösung

Wir versuchen zunächst, eine explizite Lösung der Laplacegleichung zu berechnen, mit Hilfe der wir weitere Lösungsdarstellungen ableiten können.

Beobachtung:

Der Laplaceoperator $\triangle$ ist invariant gegenüber Rotationen in $\mathbb{R}^n$

Lösungsansatz:

$$\boxed{u(\mathbf{x}) = v(r)}, \quad r = \|\mathbf{x}\| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$$

Man rechnet leicht nach: $\frac{\partial u}{\partial x_i} = v'(r)\,\frac{\partial r}{\partial x_i}$

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{-1/2}\,2x_i = \frac{x_i}{r} \quad (x \neq 0)$$

und damit gilt für $i = 1, \ldots, n$:

$$u_{x_i} = v'(r)\frac{x_i}{r}, \quad u_{x_i x_i} = v''(r)\,\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right)$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = \frac{v''(r)}{r^2}\underbrace{\sum_{i=1}^n x_i^2}_{r^2} + v'(r)\Big(\overbrace{\sum_{i=1}^n \frac{1}{r}}^{n} - \frac{1}{r^3}\underbrace{\sum_{i=1}^n x_i^2}_{r^2}\Big) = v''(r) + \frac{v'(r)}{r}(n-1)$$

Wir erhalten also

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r)$$

und mit $\Delta u = 0$ ergibt sich die gewöhnliche Differentialgleichung

GDGL 2. Ord. linear homogen

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0$$

Setzen wir $\boxed{w = v'} \neq 0$, so löst w die lineare Differentialgleichung

DGL 1. Ord. linear Lösung

$$w' = -\frac{n-1}{r} w$$

$(\ln w)' = \frac{w'}{w} = -\frac{n-1}{r}$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist gegeben durch

$\ln w = -(n-1) \ln r + c$

$w = \alpha r^{-(n-1)}$

$$w(r) = \frac{\alpha}{r^{n-1}}$$

mit einer Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$. Für $v(r)$ gilt demnach

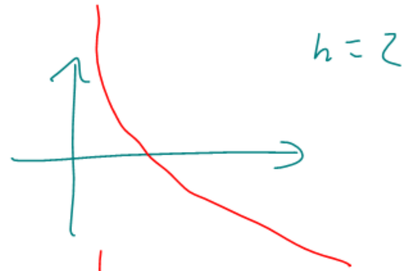
$$v' = \frac{\alpha}{r^{n-1}}$$

Die Gleichung für v können wir integrieren und bekommen damit eine Lösung in der Form

$$v(r) = \begin{cases} -b \log r + c & (n = 2) \\ \dfrac{b}{r^{n-2}} + c & (n \geq 3) \end{cases}$$

mit den beiden Konstanten b und c.

$\|x\| = r$

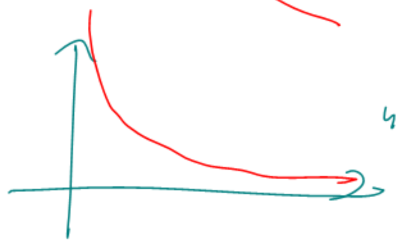


$n = 2$

Definition:

Die Funktion

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \log \|x\| & (n = 2) \\ \dfrac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \|x\|^{2-n} & (n \geq 3) \end{cases}$$



$n > 2$

definiert für $x \in \mathbb{R}^n$, $\boxed{x \neq 0,}$ nennt man die **Fundamentallösung der Laplacegleichung**. Die Konstante $\alpha(n)$ bezeichnet dabei das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$.

$\alpha(3) = \frac{4}{3}\pi$

Bemerkung:

Die Fundamentallösung ist für alle $\mathbf{x} \neq 0$ eine harmonische Funktion.

Beispiel:

Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ gilt vol $(K_1(0)) = \alpha(3) = 4\pi/3$ und damit ist die Fundamentallösung gegeben durch

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}$$

Satz: (Darstellung der Lösung der Poissonggleichung)

Eine Lösung der Possiongleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

ist gegeben durch

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}$$

Nachteil
i) Grenzen
ii) Faltung

Vorsicht

$$u(x) = \int \phi(x-y) f(y)\, dy$$

$$\Delta_x u(x) = \Delta_x \int \qquad = \int \underbrace{\Delta_x \phi(x-y)}_{=0} f(y)\, dy \quad \cancel{= 0 \quad \neq -f}$$

bis auf $y = x$!

$$u(x) = \int \phi(x-y) f(y)\, dy$$

Singulär bei $y = x$ $\qquad x - y = z$

$$\left(\begin{array}{ll} n=2 & r\,dr\,d\varphi \\ n=3 & r^2\,dr\,d\varphi \sin\theta\, d\theta \end{array} \right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(z)\, f(x-z)\, dz = \int \frac{c}{r^{n-2}} \left(f(x) + \cdots\right) r^{n-1}\, dr \left(d\varphi\, d\theta \ldots\right)$$

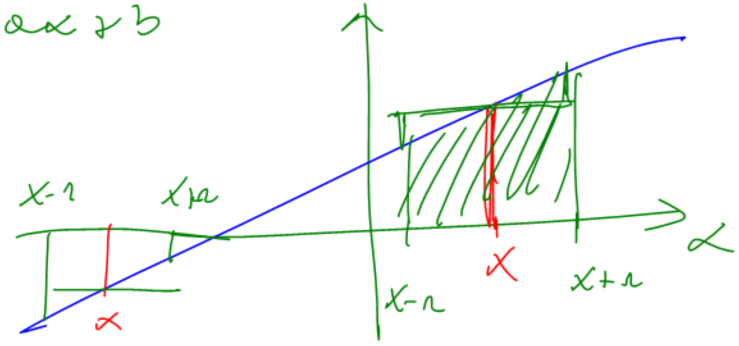
$$\underbrace{\int r\, dr}_{\text{integrierbar}} \ldots$$

Andererseits:

$$\Delta_x u = \ldots\ldots \qquad \int \frac{c}{r} \qquad r^{n-1}\, dr = \int \frac{1}{r}\, dr$$

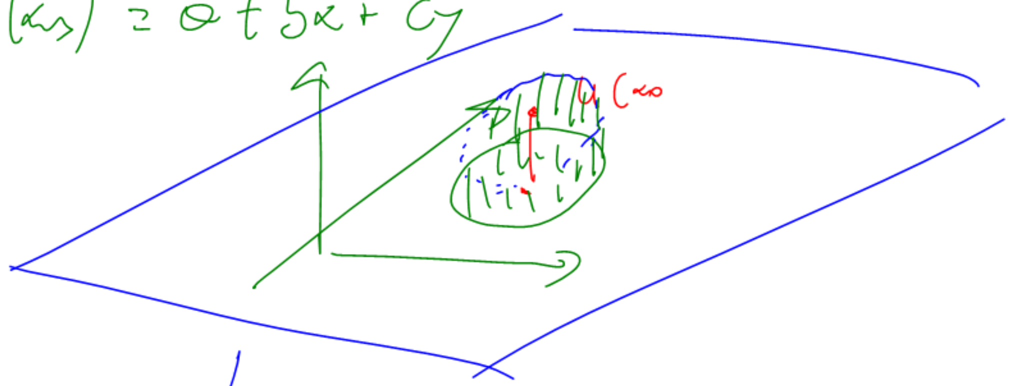
Singulär !

$n=1$ $\quad u_{xx}=0$ $\quad u = ax+b$



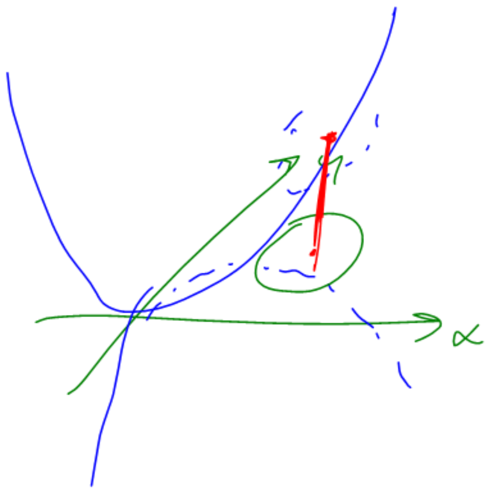
$$u(x) = \frac{u(x-r)+u(x+r)}{2}$$

$n=2$ $\quad u_{xx}+u_{yy}=0$ $\quad$ z.B. $\quad u(x,y) = a+bx+cy$



z.B. $\quad u(x,y) = a+bx+cy+dxy$

z.B. $\quad u(x,y) = x^2-y^2$



4.2 Eigenschaften harmonischer Funktionen

Die **Mittelwerteigenschaft:**

$\Delta u = 0$

Eine besondere Eigenschaft harmonischer Funktionen ist, dass der Funktionswert an einer Stelle $\mathbf{x}$ stets gleich dem Mittelwert von u über eine Kugel mit Mittelpunkt $\mathbf{x}$ bzw. der zugehörigen Sphäre um $\mathbf{x}$ ist.

Satz:

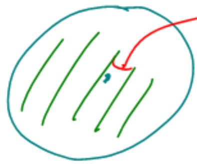
$\Delta u = 0$

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Ist $u \in C^2(U)$ harmonisch, dann gilt

$$u(\mathbf{x}) = ⨍_{\partial B(\mathbf{x},r)} u \, dS = ⨍_{B(\mathbf{x},r)} u \, d\mathbf{y}$$

$n = 2$

$u(x) =$



$\int_{B(x,r)} u(y) \, dy$

für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$.

Notation:

Bei Mittelungen über die Kugel oder die Sphäre schreiben wir

$$⨍_{B(x,r)} \dots = \frac{1}{\text{vol}(B(\mathbf{x}, r))} \int_{B(x,r)} \dots$$

$$⨍_{\partial B(x,r)} = \frac{1}{\text{vol}(\partial B(x,r))} \int_{\partial B(x,r)}$$

Beweis:

Wir definieren für festes $\mathbf{x} \in U$ die Funktion $\phi(r)$ durch

$$\boxed{\phi(r) := \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} u(\mathbf{y})\, dS(\mathbf{y})} = \fint_{\partial B(0,1)} u(\mathbf{x} + r\mathbf{z})\, dS(\mathbf{z})$$

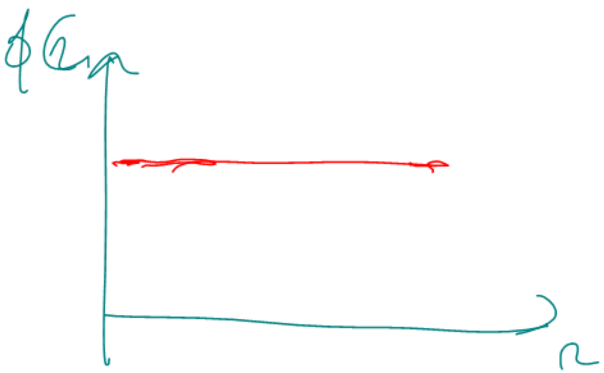
Dann gilt

$$\phi'(r) = \fint_{\partial B(0,1)} Du(\mathbf{x} + r\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z}\, dS(\mathbf{z})$$

und mit Hilfe der Greenschen Formeln erhalten wir

$$\begin{aligned} \boxed{\phi'(r)} &= \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} Du(\mathbf{y}) \cdot \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{r}\, dS(\mathbf{y}) \\ &= \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, dS(\mathbf{y}) \\ &= \frac{r}{n} \fint_{B(\mathbf{x},r)} \Delta u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = 0 \end{aligned}$$

falls $\Delta u = 0$



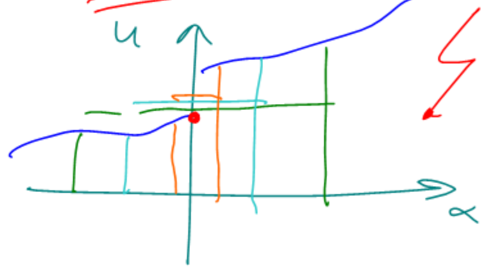
Damit ist ϕ konstant und es gilt

weil u stetig

$$\phi(r) = \lim_{t \to 0} \phi(t) = \lim_{t \to 0} \fint_{\partial B(\mathbf{x},t)} u(\mathbf{y})\, dS(\mathbf{y}) = u(\mathbf{x})$$

Unter Verwendung von Polarkoordinaten erhalten wir schließlich

u nicht stetig



$$\begin{aligned}\int\limits_{B(\mathbf{x},r)} u\, d\mathbf{y} &= \int\limits_0^r \left(\int\limits_{\partial B(\mathbf{x},s)} u dS \right) ds \\ &= u(\mathbf{x}) \int\limits_0^r n\alpha(n) s^{n-1} ds = \alpha(n) r^n u(\mathbf{x})\end{aligned}$$

Damit ergibt sich gerade die Mittelwertformel

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\alpha(n) r^n} \int\limits_{B(\mathbf{x},r)} u\, d\mathbf{y}$$

Es gilt auch folgende Umkehrung

Satz:

Für die Funktion $u \in C^2(U)$ gelte

$$u(\mathbf{x}) = \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} u dS$$

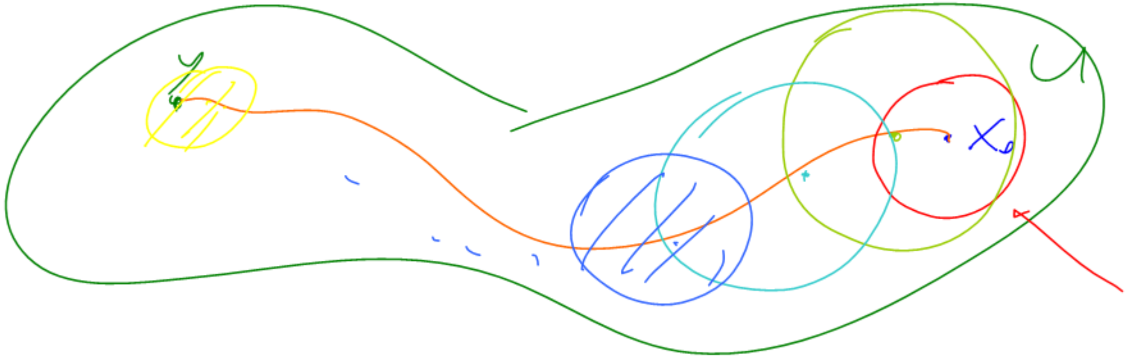
für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$, dann ist u harmonisch.

Beweis:

Ist $\Delta u \neq 0$, so existiert eine Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$, sodass $\Delta u > 0$ innerhalb von $B(\mathbf{x}, r)$ gilt. Wir wissen aber, dass

$$0 = \phi'(r) = \frac{r}{n} \fint_{B(\mathbf{x},r)} \Delta u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} > 0$$

was zu einem Widerspruch führt. Also ist u harmonisch.



$u(x_0) = \max_{\partial U} u(x)$

$\cap E$

$u(x) = u(x_0)$ auf

auf

auf

auf

Beh $u(y) = u(x_0)$

Das **Maximumprinzip** harmonischer Funktionen:

$\Delta u = 0$

Satz: Sei $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ harmonisch in U. Dann gilt:

1) **Maximumprinzip**

$$\max_{\mathbf{x}\in\overline{U}} u(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x}\in\partial U} u(\mathbf{x})$$

2) **Starkes Maximumprinzip**
Ist U zusammenhängend und existiert ein Punkt $\mathbf{x}_0 \in U$ mit

$$u(\mathbf{x}_0) = \max_{\mathbf{x}\in\overline{U}} u(\mathbf{x})$$

so folgt, dass u auf U konstant ist.

Beweisidee:

Verwende auf geeignete Weise die **Mittelwerteigenschaft** harmonischer Funktionen.

Eindeutigkeit $\left\{\begin{array}{ll} -\Delta u = f & \Omega \\ u = \varphi & \partial\Omega \end{array}\right\} \Leftarrow$ Max P $\left\{\begin{array}{ll} -\Delta w = 0 & \Omega \\ w = 0 & \partial\Omega \end{array}\right\} \Leftarrow$ Mittelwerteigenschaften

In der Realität kommt $\operatorname{div}(A(x)\nabla u)$

Wärmeleitungskoeffizient ist von x abhängig

i.e. Klein Max Prinzip

Wichtige Folgerung aus dem Maximumprinzip:

$\Rightarrow$ **Eindeutige Lösung der Randwertaufgabe**

Satz: Sei $g \in C(\partial U)$, $f \in C(U)$. Dann existiert höchstens eine Lösung $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{in } U \\ u &= g \quad \text{auf } \partial U \end{cases}$$

linear!

$-\Delta u_1 = f$

$-\Delta u_2 = f$

Beweis:

$-\Delta(u_1 - u_2) = -\Delta u_1 + \Delta u_2 = 0$

Seien u_1 und u_2 zwei Lösungen. Dann löst $w = \pm(u_1 - u_2)$ das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta w &= 0 \quad \text{in } U \\ w &= 0 \quad \text{auf } \partial U \end{cases}$$

$\operatorname{Max} u = 0 = \max_{\partial U} u$

$\operatorname{Min} u = 0 = \min_{\partial U} u$

Aus dem Maximumprinzip folgt dann direkt

$$w = \pm(u_1 - u_2) = 0$$

identisch auf U und daher gilt $u_1 = u_2$.