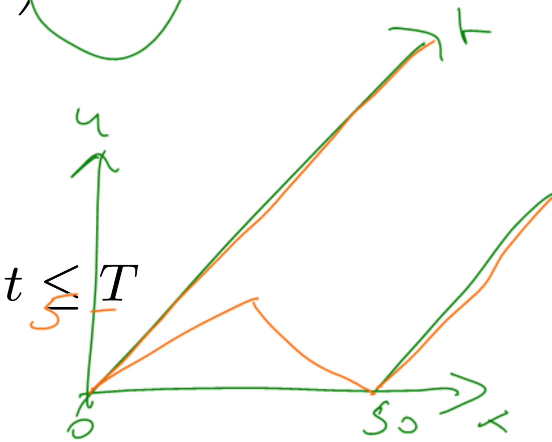
Die Lösung läßt sich also direkt angeben:

$$a_n(t) = b_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\cdot t\right) + \int_0^t \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\cdot(t-s)\right) c_n(s)\, ds$$

Beispiel: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$

Wir betrachten das homogene Anfangsrandwertproblem



$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & : \ 0 < x < 50,\ 0 < t \le T \\ u(x,0) = 5 - \frac{1}{5}|x-25| & : \ 0 \le x \le 50 \\ u(0,t) = u(50,t) = 0 & : \ 0 \le t \le T \end{cases}$$

Die Berechnung der Fourier–Koeffizienten von $g(x) = 5 - \frac{1}{5}|x-25|$ ergibt

$f(x,t) \equiv 0 \Rightarrow c_n \equiv 0$

$$b_n = \frac{1}{25}\int_0^{50}\left(5 - \frac{1}{5}|x-25|\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{50}\right) dx = \frac{40}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Da wir eine homogene Wärmeleitungsgleichung betrachten, folgt

$$a_n(t) = \frac{40}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{2500} \cdot t\right)$$

und die Lösung als Fourier–Reihe lautet

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{40}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}_{b_n} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{2500} \cdot t\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{50}\right) \xrightarrow{t \to \infty} 0$$

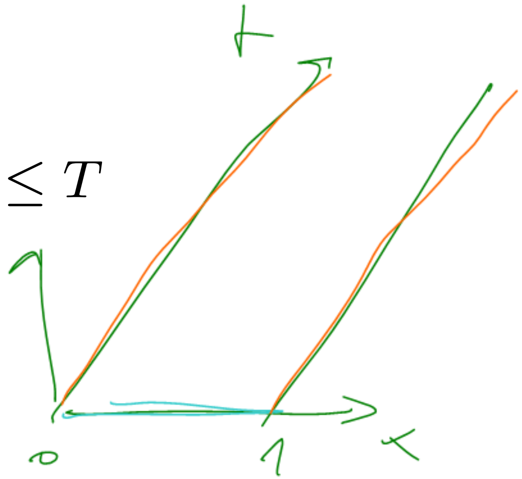
Beobachtung:

1) Für festes $T > 0$ fallen die Fourier–Koeffizienten $a_n(t)$ der Lösung exponentiell schnell für $n \to \infty$ ab. Höhere Werte für n beschreiben gerade die höheren Frequenzen in der Lösung.

2) Für festes n fallen die Fourier–Koeffizienten exponentiell schnell für $t \to \infty$ ab. Der Abfall ist umso schneller, je größer n ist. Für große Zeiten beschreiben also wenige Terme der Fourier–Reihe die exakte Lösung sehr gut.

Beispiel:

Wir betrachten das inhomogene Anfangsrandwertproblem



$$\begin{cases} u_t - u_{xx} &= x = f(x,t) & : \ 0 < x < 1,\ 0 < t \leq T \\ u(x,0) &= 0 & : \ 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 & : \ 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Dann gilt mit den Bezeichnungen von oben

$$\begin{aligned} b_n &= 0 \\ c_n(t) &= c_n = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \end{aligned}$$

und damit

$$a_n(t) = 2\int_0^t e^{-n^2\pi^2(t-s)}\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\,ds = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3}\left(1 - e^{-n^2\pi^2 t}\right)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3}\left(1 - e^{-n^2\pi^2 t}\right)\sin\frac{n\pi x}{\ell} \xrightarrow{t\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3}\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

$t \to \infty$

Alternativ: stationäres Problem

$$\cancel{u_t} - u_{xx} = x$$

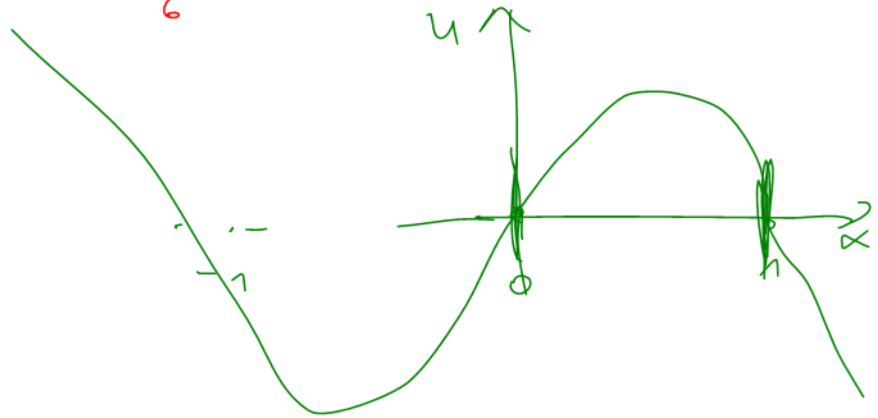
$$u(0) = u(1) = 0$$

$$u_x = -\frac{x^2}{2} + a$$

$$u = -\frac{x^3}{6} + ax + \cancel{b}$$

$$0 = u(1) = -\frac{1}{6} + a \qquad a = \frac{1}{6}$$

$$u(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{1}{6}x = -\frac{x}{6}\left(x^2 - 1\right)$$



$$u_t = u_{xx} + f(x,t)$$
$$u(x,0) = g(x)$$
$$u(0,t) = h_e(t) \qquad u(1,t) = h_2(t)$$

$$u_k(x,t) = h_e(t)(1-x) + h_2(t)\,x$$

neue Fkt $\hat{u}(x,t) = u(x,t) - u_k(x,t)$

$$\hat{u}(0,t) = u(0,t) - u_k(0,t) = 0$$
$$\hat{u}(1,t) = \qquad = 0$$

$$\hat{u}_t - \hat{u}_{xx} = u_t - u_{xx} - u_{kt} + \cancel{u_{kxx}} = f(x,t) - h_e'(t)(1-x) - h_2'(t)\,x$$

$$\hat{u}_t = \hat{u}_{xx} + \underbrace{f(x,t) - h_e'(t)(1-x) - h_2'(t)\,x}_{\hat{f}(x,t)}$$

lösen; $u(x,t) = \hat{u}(x,t) + u_k(x,t)$

Bis jetzt:

Anfangsrandwertprobleme mit homogenen Randbedingungen, d.h.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x,t) & : \; 0 < x < l,\; 0 < t \leq T \\ u(x,0) = g(x) & : \; 0 \leq x \leq l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & : \; 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Was passiert

1) bei (einseitig **Neumannschen**) Randbedingungen der Form

Wärmebad $$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0,$$ Isolation

2) bei **periodischen** Randbedingungen der Form

$$u(0,t) = u(l,t), \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l,t)$$

Wie sehen die entsprechenden Fourier–Methoden aus?

Wir betrachten zunächst das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} &= f(x,t) &: 0 < x < l,\, 0 < t \le T \\ u(x,0) &= g(x) &: 0 \le x \le l \\ u(0,t) &= 0 &: 0 \le t \le T \\ u_x(l,t) &= 0 &: 0 \le t \le T \end{cases}$$

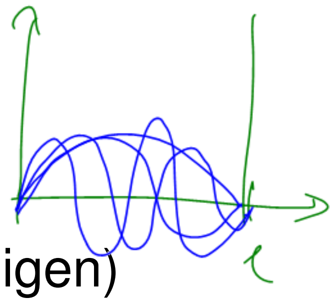
Bemerkung:

Beschreibt die Funktion $u(x,t)$ eine orts– und zeitabhängige Temperaturverteilung, so bedeutet

1) die Bedingung $u(0,t) = 0$, dass das linke Ende des Intervalls $[0,l]$ mit einem unendlich großen Eisbad in Kontakt steht,

2) die Bedingung $u_x(l,t) = 0$, dass am rechten Ende kein Wärmefluß nach rechts existiert, d.h. das rechte Ende des Intervalls ist **perfekt wärmeisoliert**.

Die Fourier–Reihe



$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

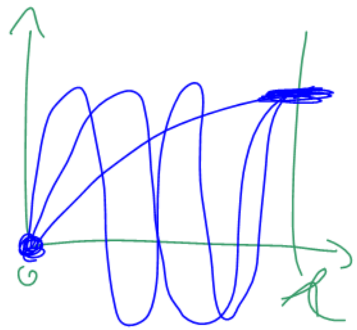
kann **keine** Lösung sein, denn unabhängig von den (zeitabhängigen) Koeffizienten gilt dann stets

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

Die im Problem vorgegebenen Randbedingungen

$$u(0,t) = 0, \qquad u_x(l,t) = 0$$

werden zum Beispiel durch die Funktion



$$u(x,t) = \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$$

erfüllt.

$u(0,t) = 0$

$u_x(l,t) = \cos \frac{\pi l}{2l} \Big| \frac{\pi}{2l} = 0$

Diese Funktion beschreibt gerade eine Viertel–Sinuswelle.

Funktionen mit höheren Frequenzen erhalten wir, wenn wir daran eine halbe Sinuswelle anhängen, also

$$\frac{\pi x + 2k\pi x}{2l} = \frac{(2k+1)\pi x}{2l}$$

$$\sin\left(\frac{\pi x}{2l} + \frac{k\pi x}{l}\right), \qquad k \in \mathbb{N}$$

Die Funktionen höherer Frequenzen sind dann von der Form

$$u(x,t) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \quad n \geq 2$$

Ein **Lösungsansatz** für das vorgegebene Anfangsrandwertproblem, der automatisch die vorgegebenen Randbedingungen erfüllt, lautet damit

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right)$$

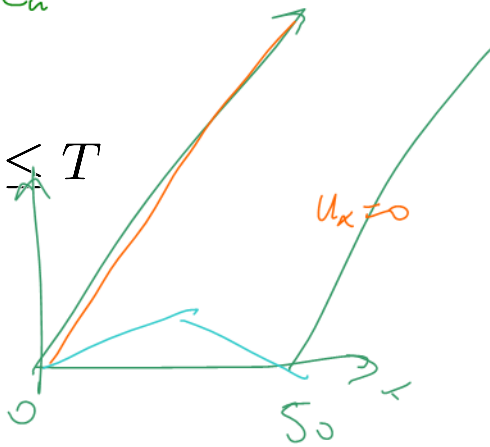
erfüllt in jedem Term die RB !

Beispiel:

$f(x,t) = 0 \Rightarrow c_n = 0$

Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem

$$
\begin{cases}
u_t = u_{xx} & : \quad 0 < x < 50,\ 0 < t \le T \\
u(x,0) = 5 - \frac{1}{5}|x-25| & : \quad 0 \le x \le 50 \\
u(0,t) = 0 & : \quad 0 \le t \le T \\
u_x(50,t) = 0 & : \quad 0 \le t \le T
\end{cases}
$$



Die Berechnung der Fourier–Koeffizienten von $g(x) = 5 - \frac{1}{5}|x-25|$ ergibt

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{25}\int_0^{50}\left(5 - \frac{1}{5}|x-25|\right)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{100}\right)dx \\
&= -\frac{80(-\sqrt{2}\sin(n\pi/2) + \sqrt{2}\cos(n\pi/2) - (-1)^n)}{\pi^2(2n-1)^2}
\end{aligned}
$$

Stationär

$$\left.\begin{aligned} -u_{xx} &= 0 \\ u(0) &= 0 \\ u_x(1) &= 0 \end{aligned}\qquad u(x) = ax + b \right\} \quad u(x) \equiv 0$$

Mit dem Lösungsansatz

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right)$$

erhalten wir durch Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung und Koeffizientenvergleich mit der Fourier–Reihe von $g(x)$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{da_n}{dt} + \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4\cdot 50^2} a_n &= 0 \\ a_n(0) &= b_n \end{aligned}$$

$n = 1, 2, \ldots$.

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet dann

$$a_n(t) = b_n e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{10000}t}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{10000}t} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{100} \quad \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

Sind beide Enden **wärmeisoliert**, so haben wir das Anfangsrandwertproblem

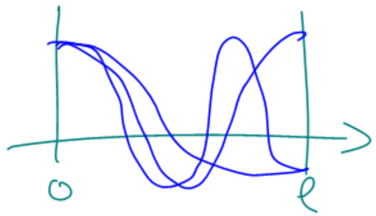
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} &= f(x,t) &: \ 0 < x < l,\ 0 < t \leq T \\ u(x,0) &= g(x) &: \ 0 \leq x \leq l \\ u_x(0,t) &= 0 &: \ 0 \leq t \leq T \\ u_x(l,t) &= 0 &: \ 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Jetzt erfüllen die Funktionen

$$u(x,t) = 1, \qquad u(x,t) = \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

die vorgegebenen Neumannschen Randbedingungen.

Ein **Lösungsansatz** lautet damit

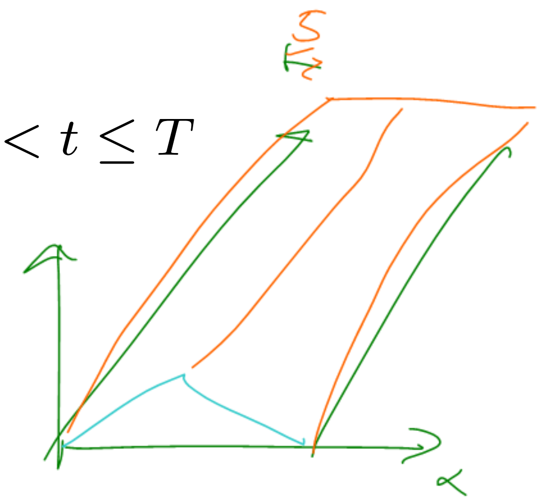


$$u(x,t) = b_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Beispiel:

$f(x,t) = 0 \Rightarrow c_n = 0$

Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem



$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & : \ 0 < x < 50,\ 0 < t \le T \\ u(x,0) = 5 - \frac{1}{5}|x-25| & : \ 0 \le x \le 50 \\ u_x(0,t) = 0 & : \ 0 \le t \le T \\ u_x(50,t) = 0 & : \ 0 \le t \le T \end{cases}$$

Mit dem Lösungsansatz

$$u(x,t) = b_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right)$$

ergibt sich durch Einsetzen in die Differentialgleichung

$$\frac{db_0}{dt}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{db_n}{dt}(t) + \frac{n^2\pi^2}{50^2} b_n(t) \right) \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right) = 0$$

Das System gewöhnlicher Differentialgleichungen lautet dann

$$\boxed{\frac{db_0}{dt}(t) = 0,} \qquad \boxed{\frac{db_n}{dt}(t) + \frac{n^2\pi^2}{50^2} b_n(t) = 0}$$

Um die zugehörigen Anfangsbedingungen festzulegen, bestimmen wir die Fourier–Reihe der Anfangsbedingung $g(x)$, d.h.

$$\boxed{g(x) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right)}$$

mit den Fourier–Koeffizienten

$$d_0 = \frac{1}{50} \int_0^{50} g(x)\,dx$$

$$d_n = \frac{2}{50} \int_0^{50} g(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right) dx$$

Man berechnet

$$
\begin{aligned}
d_0 &= \frac{5}{2} \\
d_n &= \frac{20(2\cos(n\pi/2) - 1 - (-1)^n)}{n^2\pi^2}
\end{aligned}
$$

Die Koeffizienten $b_0(t), b_1(t), \ldots$ ergeben sich damit als

$$b_n(t) = d_n e^{-\lambda_n t}$$

mit

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{2500}$$

und die Lösung lautet

$$u(x,t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n t} \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right) \quad \xrightarrow{t\to\infty} d_0 = \frac{5}{2}$$

Wir kommen nun zu **periodischen** Randbedingungen und dem Anfangsrandwertproblem auf dem **Intervall** $[-l, l]$ gegeben durch

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_t - u_{xx} & = & f(x,t) & : \ -l < x < l, \ 0 < t \leq T \\ u(x,0) & = & g(x) & : \ -l \leq x \leq l \\ u(-l,t) & = & u(l,t) & : \ 0 \leq t \leq T \\ u_x(-l,t) & = & u_x(l,t) & : \ 0 \leq t \leq T \end{array} \right.$$

Periodische Funktionen auf dem Intervall $[-l, l]$ sind

$$\psi(x) = \frac{1}{2}, \quad \psi(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad \psi(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Ein **Lösungsansatz** mit Hilfe von Fourier–Reihen ist damit

$$u(x,t) = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right)$$

Mit den Reihenentwicklungen

$$\begin{aligned} f(x,t) &= c_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + d_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right) \\ g(x) &= p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(p_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + q_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right) \end{aligned}$$

ergeben sich die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{da_0}{dt}(t) &= c_0(t) \\ \frac{da_n}{dt}(t) + \frac{n^2\pi^2}{l^2} a_n(t) &= c_n(t) \\ \frac{db_n}{dt}(t) + \frac{n^2\pi^2}{l^2} b_n(t) &= d_n(t) \end{aligned}$$

Stationär

$$-u_{xx} = \frac{1}{10}\, x\,(x^2-\pi^2)$$

$$u(-\pi) = u(\pi)$$

$$u_x(-\pi) = u_x(\pi)$$

bis auf additive Konstante eindeutig

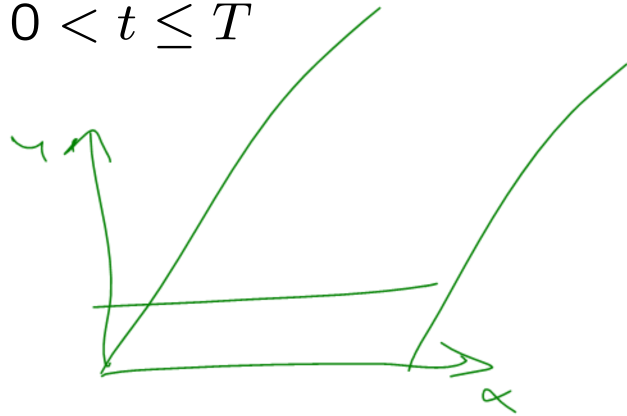
Die zugehörigen Anfangsbedingungen lauten

$$a_0(0) = p_0, \quad a_n(0) = p_n, \quad b_n(0) = q_n$$

Beispiel:

Für das Anfangsrandwertproblem mit periodischen Randbedingungen

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_t - u_{xx} & = & \frac{1}{10}x(x^2 - \pi^2) & : \quad -\pi < x < \pi,\ 0 < t \leq T \\ u(x,0) & = & 25 & : \quad -\pi \leq x \leq \pi \\ u(-\pi,t) & = & u(\pi,t) & : \quad 0 \leq t \leq T \\ u_x(-\pi,t) & = & u_x(\pi,t) & : \quad 0 \leq t \leq T \end{array} \right.$$



ist die Fourier–Entwicklung der Lösung gegeben durch

$$u(x,t) = 25 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^n}{10n^5} \left(1 - e^{-n^2 t}\right) \sin(nx)$$

7.3. Fourier–Methoden für die Wellengleichung

Lösungen in Form von Fourier–Reihen lassen sich analog zur Wärmeleitungsgleichung ableiten.

Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(x,t) & : \ 0 < x < l, \ 0 < t \le T \\ u(x,0) = g(x) & : \ 0 \le x \le l \\ u_t(x,0) = h(x) & : \ 0 \le x \le l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & : \ 0 \le t \le T \end{cases}$$

und suchen eine Lösung in der Form

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Die Fourier–Reihen für $f(x,t)$, $g(x)$ und $h(x)$ ergeben DGL's für die Lösungskoeffizienten $a_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$.

Beispiel:

Die Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} & = & 0 & : & 0 < x < l,\ 0 < t \leq T \\ u(x,0) & = & g(x) & : & 0 \leq x \leq l \\ u_t(x,0) & = & h(x) & : & 0 \leq x \leq l \\ u(0,t) & = & u(l,t) = 0 & : & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

ist gegeben durch

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ b_n \cos\left(\frac{n\pi}{l} t\right) + \frac{d_n l}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{l} t\right) \right\} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Dabei sind b_n die Fourier–Koeffizienten der Entwicklung der vorgegeben Anfangsbedingung $u(x,0) = g(x)$ und d_n die entsprechenden Koeffizienten von $u_t(x,0) = h(x)$.