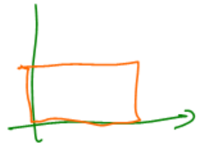
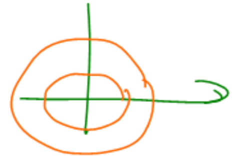
2. Ordnung, linear, skalar

x Raum, t Zeit

i) elliptisch $\quad -\Delta u = f$

Inhomogenität

{ RB Gebiete

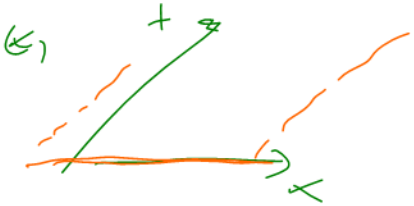
 

auch unbeschränkt

ii) parabolisch $\quad u_t = \Delta u + f$

{ AB $\quad u(t=t_0, x) = u_0(x)$

+ BB



iii) hyperbolisch $\quad u_{tt} = \Delta u + f$

{ AB $\quad u(t=t_0, x) = u_0(x)$

$u_t(t=t_0, x) = v_0(x)$

+ RB

linear $\Rightarrow$ mehrere Lsg. einer homogenen Gl. $\Rightarrow$ Linearkomb. ist auch Lsg

Lsg einer inhomogen Gl + irgendeine Lsg. homogen Gl. $\Rightarrow$ wieder Lsg

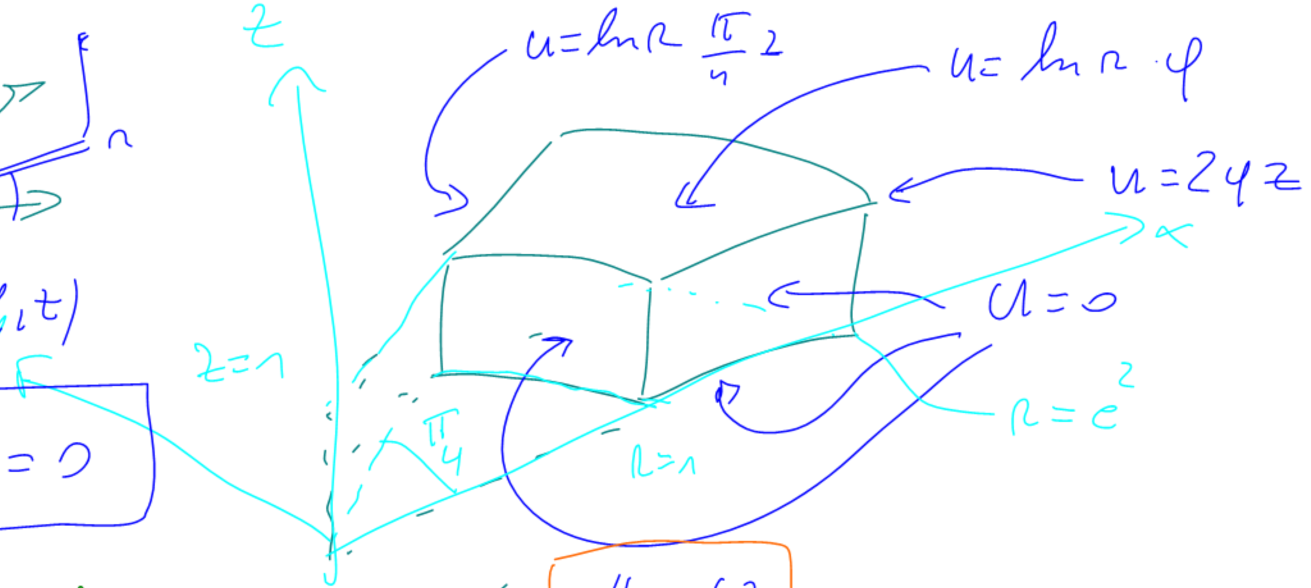
Zylinderkoordinaten (r, φ, z)

$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$z = z$

$u(x(r,\varphi,z), y(r,\varphi,z), z(r,\varphi,z)) = v(r,\varphi,z)$

$$\boxed{\Delta u = \frac{1}{r}(r v_r)_r + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi} + v_{zz} = 0}$$

$\Delta u = 0$



Produktansatz: $v(r,\varphi,z) = R(r)\,\phi(\varphi)\,Z(z)$

$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi} + v_{zz} = 0$

$R''\phi Z + \frac{R'}{r}\phi Z + \frac{1}{r^2} R \phi'' Z + R\phi Z'' = 0$

$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\phi''}{\phi} + \frac{Z''}{Z} = 0$

$\delta(r,\varphi) = \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\phi''}{\phi} = -\frac{Z''}{Z} = \delta(z) = \delta$

$\boxed{Z'' = -\delta Z}$

$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\phi''}{\phi} = \delta$

$g(r) = r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} - \delta r^2 = -\frac{\phi''}{\phi} = g(\varphi) = g$

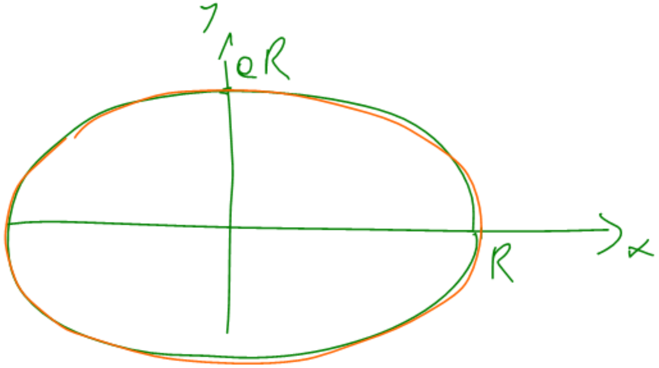
$\boxed{\phi'' - g\phi = 0}$

$\boxed{r^2 R'' + rR' - (\delta r^2 + g)R = 0}$

... allgemeine Lösung (δ, g abhängig)

Spezialfall: $\delta = 0$, $g = 0$ $\quad v(r,\varphi,z) = (r_1 + r_2 \ln r)(\varphi_1 + \varphi_2\varphi)(z_1 + z_2 z)$

Anpassen: $v(r,\varphi,z) = \ln r \cdot \varphi \cdot z$



$$\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{\varrho R}\right)^2 = 1$$

$$\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad \left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{\varrho R}\right)^2 < 1 \quad (\text{innen})$$

$$u = \frac{y}{\varrho R} \quad \text{auf} \quad \left(\frac{x}{R}\right) + \left(\frac{y}{\varrho R}\right)^2 = 1$$

$x = r\cos\varphi$

$y = \varrho r \sin\varphi$ $\quad \varrho$ fest

$$\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R\varrho}\right)^2 = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \cos^2\varphi + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \sin^2\varphi = \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

Ellipse mit x-Abschnitt r

$u(x(r,\varphi), y(r,\varphi)) = v(r,\varphi)$

$v_r = u_x x_r + u_y y_r$

$v_\varphi = u_x x_\varphi + u_y y_\varphi$

$u_{rr} = \dots$

$v_{\varphi\varphi} = \dots$

$$\boxed{r^2 v_{rr} + r v_r + v_{\varphi\varphi} = u_{xx} + u_{yy} = 0} \qquad v(R,\varphi) = \frac{y}{\varrho R} = \frac{\varrho R \sin\varphi}{\varrho R} = \sin\varphi$$

Produktansatz: $v(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$

$$v(r,\varphi) = c_0 + d_0 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k r^{-k} + d_k r^{+k}\right)\left(a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi)\right)$$

Anpassung: $b_1 = 1$ $\quad b_k = 0 \quad k \neq 1$

$a_k = 0 \quad k \geq 1$

$c_k = 0$

$d_1 \neq 0 \quad d_k = 0 \quad k > 1$

$c_0 = 0$

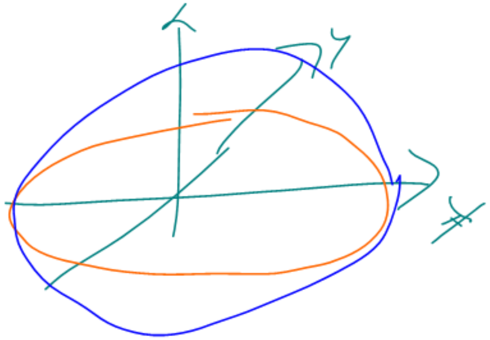
$d_0 = 0$

$v(r,\varphi) = d_1 r \sin\varphi$

$v(R,\varphi) = d_1 R \sin\varphi \overset{!}{=} \sin\varphi$

$d_1 = \frac{1}{R}$

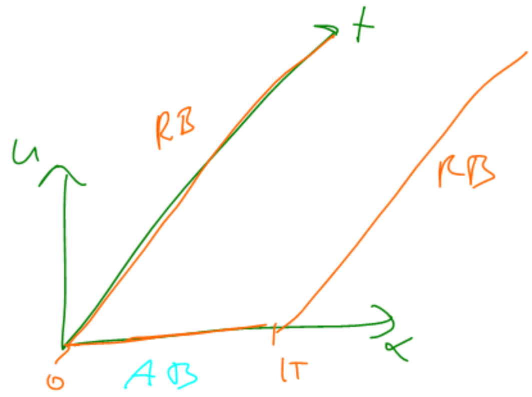
$$\boxed{v(r,\varphi) = \frac{r}{R}\sin\varphi} = \frac{y}{\varrho R}$$



5.1 Lösungen mittels Produktansätzen

Gegeben sei das eindimensionale Anfangs–Randwertproblem

$$
\begin{cases}
u_t = u_{xx} & : \ 0 < x < \pi,\ 0 < t \le T \\
u(x,0) = u_0(x) & : \ 0 \le x \le \pi \\
u(0,t) = a(t),\ u(\pi,t) = b(t) & : \ 0 \le t \le T
\end{cases}
$$



Wir suchen eine Lösung mittels des **Produktansatzes**:

$$u(x,t) = p(x) \cdot q(t)$$

Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung ergibt

$$p(x)\dot{q}(t) = q(t)p''(x)$$

und damit die Beziehung

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{p''(x)}{p(x)} \qquad (p(x) \neq 0,\ q(t) \neq 0)$$

In der Gleichung

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{p''(x)}{p(x)} \qquad (p(x) \neq 0,\ q(t) \neq 0)$$

steht

- auf der **linken** Seite ein Term, der nur von t abhängt,
- auf der **rechten** Seite ein Term, der nur von x abhängt.

Daraus folgt

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{p''(x)}{p(x)} = \text{const} =: -\delta$$

Wir erhalten also die beiden **gewöhnlichen** Differentialgleichungen

$$\dot{q}(t) + \delta\, q(t) = 0 \qquad \text{und} \qquad p''(x) + \delta\, p(x) = 0$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung $\dot{q}(t) + \delta\, q(t) = 0$ ist gegeben durch

$$q(t) = c_0\, e^{-\delta t},$$

Die Lösung der Gleichung $p''(x) + \delta\, p(x) = 0$ hängt entscheidend von der Konstanten δ ab:

1) Für $\delta = 0$ lautet die allgemeine Lösung

$$p(x) = c_1 x + c_2$$

2) Für $\delta < 0$ lautet die allgemeine Lösung

$$p(x) = c_1 e^{-\sqrt{|\delta|}x} + c_2 e^{\sqrt{|\delta|}x}$$

3) Für $\delta > 0$ lautet die allgemeine Lösung

$$p(x) = c_1 \sin(\sqrt{\delta}x) + c_2 \cos(\sqrt{\delta}x)$$

Ohne Berücksichtigung der vorgegebenen Anfangs– und Randbedingungen erhalten wir über den Produktansatz folgende Lösungsklassen:

$\delta = 0$ $$u(x,t) = c_0\, \cancel{e^{-\delta t}} \cdot (c_1 x + c_2)$$ beschränkt mit t, unbeschr. x

$\delta < 0$ $$u(x,t) = c_0\, e^{-\delta t} \cdot (c_1 e^{-\sqrt{|\delta|}x} + c_2 e^{\sqrt{|\delta|}x})$$ unbeschr. t, unbeschr. x

$\delta > 0$ $$u(x,t) = c_0\, e^{-\delta t} \cdot (c_1 \sin(\sqrt{\delta}x) + c_2 \cos(\sqrt{\delta}x))$$ beschr. mit t und x

Die vorgegebenen Anfangs– und Randbedingungen lauten

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u(0,t) = a(t), \qquad u(\pi,t) = b(t)$$

Fazit:

Die Parametermenge $\{c_0, c_1, c_2, \delta\}$ kann i.A. nicht gegebene Funktionen $u_0(x), a(t)$ und $b(t)$ beschreiben.
Der Produktansatz liefert nur bei speziellen Anfangs– und Randbedingungen eine explizite Lösung.

Beispiel:

Gegeben sei das eindimensionale Anfangs–Randwertproblem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & : \; 0 < x < \pi,\; 0 < t \le T \\ u(x,0) = \sin x & : \; 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = 0,\; u(\pi,t) = 0 & : \; 0 \le t \le T \end{cases}$$

Aufgrund der vorgegebenen Randbedingungen fallen grundsätzlich die ersten beiden Lösungsklassen aus. Es bleibt also

$$u(x,t) = c_0\, e^{-\delta t} \cdot (c_1 \sin(\sqrt{\delta} x) + c_2 \cos(\sqrt{\delta} x))$$

$\delta = 1$

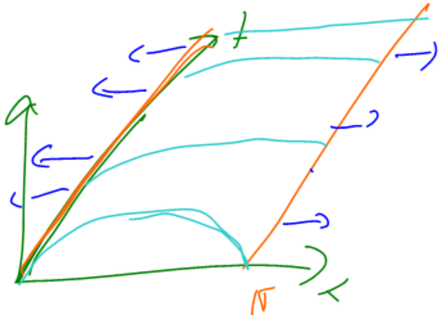
$c_2 = 0$

$c_0 \cdot c_1 = 1$

Wegen der Vorgabe $u(x,0) = \sin x$ erhalten wir die Lösung

$$\boxed{u(x,t) = e^{-t} \sin x}$$

Das Beispiel sieht etwas künstlich aus, ist es aber nicht!



u Temperatur

$-u_x$ Wärmefluß

$-u_x(x,t) = -e^{-t}\cos x$

$-u_x(0,t) = -e^{-t} < 0$

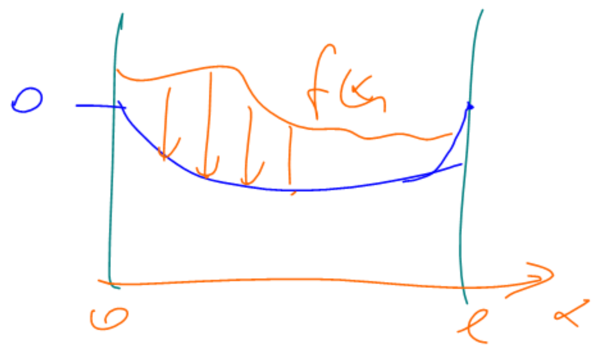
$-u_x(\pi,t) = -e^{-t}(-1) = e^{-t} > 0$

Kapitel 7: Fourier–Methoden bei partiellen Differentialgleichungen

In diesem Kapitel untersuchen wir allgemeine Fourier–Methoden zur (approximativen) Lösung von Anfangs–, Randwert– und Anfangsrandwertaufgaben.

7.1. Beispiel: Fourier–Methoden bei gewöhnlichen DGL's

Gegeben sei das eindimensionale Randwertproblem:



$$
\begin{aligned}
-T\,\frac{d^2u}{dx^2} &= f(x), \quad 0 < x < l \\
u(0) &= 0 \\
u(l) &= 0
\end{aligned}
$$

Anwendung:

Die Lösung $u(x)$ beschreibt die Gleichgewichtslage eines eingespannten hängenden Seils mit Spannung T und extern angreifender Kraft $f(x)$.

Wir betrachten zunächst den **Spezialfall**:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

mit vorgegebenen Koeffizienten $c_1, \ldots, c_N$.
Die Inhomogenität $f(x)$ erfüllt insbesondere die homogenen Randbedingungen

$$f(0) = f(l) = 0$$

und wir suchen daher eine Lösung des Randwertproblems in der Form

$$u(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Damit sind die homogenenen Randbedingungen für **alle** Lösungskoeffizienten $b_1, \ldots, b_N \in \mathbb{R}$ erfüllt und wir versuchen die Koeffizienten b_n so zu bestimmen, dass $u(x)$ eine Lösung der vorgegebenen DGL ist.

Einsetzen in die DGL ergibt:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{Tn^2\pi^2}{l^2} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \sum_{n=1}^{N} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Für die Koeffizienten $b_1, \ldots, b_N$ gilt also

$$b_n = \frac{l^2 c_n}{Tn^2\pi^2}, \quad n = 1, \ldots, N$$

und wir erhalten demnach als Lösung des Randwertproblems

$$u(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{l^2 c_n}{Tn^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Beispiel:

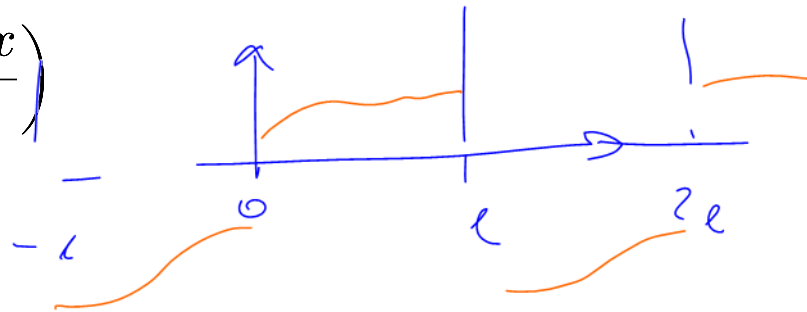
Für die Inhomogenität $f(x) = \sin(\pi x) - 2\sin(2\pi x) + 5\sin(3\pi x)$ und $l = T = 1$ lautet die Lösung

$$u(x) = \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x) - \frac{1}{2\pi^2}\sin(2\pi x) + \frac{5}{9\pi^2}\sin(3\pi x)$$

Der allgemeine Fall:

Approximiere $f(x)$ durch eine **endliche Fourier–Reihe** $f_N(x)$, d.h.

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$



mit den **Fourier–Koeffizienten**

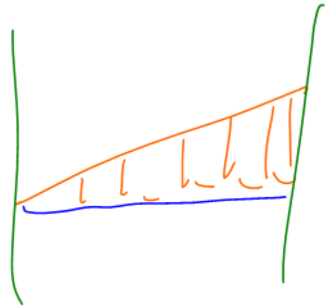
$$c_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\,dx, \quad n = 1,\ldots,N$$

Siehe Analysis II: Fourier–Reihen (Kapitel 10, 11)

Eine **approximative Lösung** des Randwertproblems mit Inhomogenität $f(x)$ ist dann gegeben durch:

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{l^2 c_n}{Tn^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Beispiel:



Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\frac{d^2u}{dx^2} &= x, \quad 0 < x < 1 \\ u(0) &= 0 \\ u(1) &= 0 \end{aligned}$$

Die exakte Lösung läßt sich durch **Integration** berechnen:

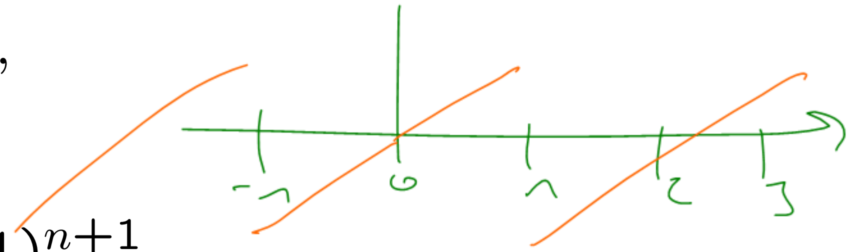
$$u'(x) = -\frac{x^2}{2} + a \quad \Rightarrow \quad u(x) = -\frac{x^3}{6} + ax + b$$

Mit den Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$ folgt:

$$u(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{1}{6}x = \frac{1}{6}x(1 - x^2)$$

Wir berechnen nun zunächst die Fourier–Koeffizienten der Funktion

$$f(x) = x,$$



also

$$c_n = 2\int_0^1 x \sin(n\pi x)\,dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}, \quad n = 1, \ldots, N$$

Damit ergibt sich eine **approximative** Lösung in der Form

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{n^2\pi^2} \sin(n\pi x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{2(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3} \sin(n\pi x)$$

Wir erhalten etwa

$$u_4(x) = \frac{2}{\pi^3}\sin(\pi x) - \frac{1}{4\pi^3}\sin(2\pi x) + \frac{2}{27\pi^3}\sin(3\pi x) - \frac{1}{32\pi^3}\sin(4\pi x)$$

Frage: Wie gut ist die approximative Lösung?

Antwort: Berechne die Fourier–Koeffizienten der exakten Lösung: mit

$$u(x) = \frac{1}{6}x(1 - x^2)$$

folgt für die Fourier–Reihe

$$\tilde{u}_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \sin(n\pi x)$$

die Darstellung der Fourier–Koeffizienten

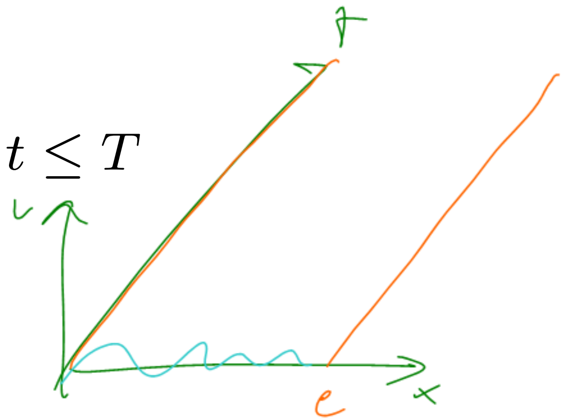
$$a_n = 2 \int_0^1 \frac{1}{6}x(1 - x^2) \sin(n\pi x)\, dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3}$$

Dies sind aber gerade die (Fourier–)Koeffizienten der **approximativen** Lösung!

7.2. Fourier–Methoden für die Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten folgendes Anfangsrandwertproblem der Wärmeleitungsgleichung

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t - u_{xx} & = & f(x,t) & : \quad 0 < x < l,\ 0 < t \le T \\ u(x,0) & = & g(x) & : \quad 0 \le x \le l \\ u(0,t) & = & u(l,t) = 0 & : \quad 0 \le t \le T \end{array}\right.$$



und suchen eine Lösung in Form einer Fourier–Reihe, also

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Bemerkung:

Da wir nur Sinus–Funktionen in der Fourier–Reihe verwenden, sind die vorgegebenen homogenen Randbedingungen automatisch erfüllt.

Für die Koeffizienten der Fourier–Reihe gilt wiederum

Zu bestimmen

$$a_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l u(x,t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

Gleichzeitig können wir die Inhomogenität $f(x,t)$ in einer Fourier–Reihe darstellen, d.h.

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad c_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x,t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

Wir berechnen nun die Orts– und Zeitableitungen des Lösungsansatzes

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

und erhalten

die Beziehungen

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{da_n}{dt}(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\
\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \frac{n\pi}{l} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= -\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \frac{n^2\pi^2}{l^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$
u_t - u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{da_n}{dt}(t) + a_n(t) \frac{n^2\pi^2}{l^2} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \overbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}}^{f(x,t)}
$$

und wir erhalten durch Gleichsetzen mit der Fourier–Reihe von $f(x,t)$

ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen der Form

$$\boxed{\frac{da_n}{dt}(t) + a_n(t)\frac{n^2\pi^2}{l^2} = c_n(t)}$$

Die Anfangsbedingungen $a_1(0), a_2(0), \ldots$ ergeben sich aus der Anfangsbedingung $u(x,0) = g(x)$:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\,dx$$

und daher

$$\boxed{a_n(0) = b_n,} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Damit haben wir ein Anfangswertproblem für ein lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen, das zudem entkoppelt ist.

Die Lösung läßt sich also direkt angeben:

$$a_n(t) = b_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\cdot t\right) + \int_0^t \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\cdot(t-s)\right) c_n(s)\,ds$$

Beispiel: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l}$

Wir betrachten das homogene Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & : \; 0 < x < 50,\; 0 < t \le T \\ u(x,0) = 5 - \frac{1}{5}|x-25| & : \; 0 \le x \le 50 \\ u(0,t) = u(50,t) = 0 & : \; 0 \le t \le T \end{cases}$$

Die Berechnung der Fourier–Koeffizienten von $g(x) = 5 - \frac{1}{5}|x-25|$ ergibt

$$b_n = \frac{1}{25}\int_0^{50}\left(5 - \frac{1}{5}|x-25|\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{50}\right)dx = \frac{40}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$