Kapitel 3: Partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung

Definition: Eine lineare PDE 2. Ordnung in n Variablen ist gegeben durch

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + fu = g$$

Dabei sind die Terme a_{ij}, b_i, f und g Funktionen von $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$.

Den ersten Term nennt man den **Hauptteil** der PDE. Weiter gelte oBdA

$$a_{ij}(\mathbf{x}) = a_{ji}(\mathbf{x}), \quad i, j = 1, \ldots, n$$

Spezialfall:

Gilt $a_{ij} =$ const., $i, j = 1, \ldots, n$, so läßt sich die PDE auch in folgender Matrixschreibweise darstellen:

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla) u + (\mathbf{b}^t \, \nabla) u + fu = g$$

mit der symmetrischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$.

falls $a_{13} = 2$, $a_{31} = 4$ $\qquad a_{13} u_{x_1 x_3} + a_{31} u_{x_3 x_1} = \frac{a_{13}+a_{31}}{2} \left(u_{x_1 x_3} + u_{x_3 x_1} \right)$

a_{ij} konst

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, u_{x_i x_j} = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i}\left(a_{ij}\, u_{x_j}\right) = \operatorname{div}\left(A \nabla u\right)$$

$$\left(\operatorname{div} b \doteq \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} b_i = \nabla^T b\right)$$

$a_{ij} = a_{ij}(x)$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i}\left(a_{ij}(x)\, u_{x_j}\right) - \sum_{i,j=1}^{n}\left(\partial_{x_i} a_{ij}(x)\right) u_{x_j}$$

$$= \operatorname{div}\left(A \nabla u\right) - b(x) \cdot \nabla u$$

2.te Abl. 1. Abl.

3.1 Normalformen linearer Gleichungen 2. Ordnung

Gegeben sei die Differentialgleichung (in Matrixschreibweise)

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla)u + (\mathbf{b}^t\, \nabla)u + fu = g$$

mit der konstanten und symmetrischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$.

Lineare Algebra: Hauptachsentransformation

Jede reelle, symmetrische Matrix $\mathbf{A}$ ist **diagonalisierbar**. Weiter gilt

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}$$

wobei $\mathbf{S}$ als eine **orthogonale** Matrix gewählt werden kann.

Bemerkung: Eine reelle Matrix $\mathbf{S}$ ist **orthogonal**, falls gilt:

$$\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$$

Ansatz zur Herleitung von Normalformen:

Verwende die Koordinatentransformation

$$\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{y} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{y} = \mathbf{S}^T \mathbf{x}$$

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = (S^T)_{ji} = (S)_{ij}$$

und setze

$$\tilde{u}(\mathbf{y}) := u(\mathbf{S}\,\mathbf{y})$$

Mit $u(\mathbf{x}) = \tilde{u}(\mathbf{S}^T \mathbf{x})$ folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} (S)_{ij} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j}.$$

$$\nabla_x u = S \nabla_y \tilde{u}$$

Wegen $\dfrac{\partial y_j}{\partial x_i} = s_{ij}$ gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j}$$

Die letzte Beziehung bedeutet aber gerade:

$$\nabla_x \, u(\mathbf{x}) = \mathbf{S} \, \nabla_y \tilde{u}(\mathbf{S}^T \mathbf{x})$$

oder in formaler Schreibweise

$$\nabla_x = \mathbf{S} \, \nabla_y$$

Transponieren wir diese Beziehung, so folgt

$$\nabla_x^T = (\mathbf{S} \, \nabla_y)^T = \nabla_y^T \, S^T$$

Ergebnis:

Löst u die Gleichung

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla) u + (\mathbf{b}^t \, \nabla) u + f u = g$$

x Variante

so erhalten wir für $\tilde{u}$ die PDE

$$(\nabla^T \underbrace{\mathbf{S}^T \mathbf{A} \mathbf{S}}_{D} \nabla) \tilde{u} + (\mathbf{b}^t \mathbf{S} \, \nabla) \tilde{u} + \tilde{f} \tilde{u} = \tilde{g}$$

y Variante

D (diagonal)

$b^t S = (S^T b)^T$

Definition:

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla) u + (\mathbf{b}^t \nabla) u + f u = g$$

mit der konstanten und symmetrischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$.

Dann ist die zugehörige Diagonalform der PDE gegeben durch

$$(\nabla^T \mathbf{D} \nabla) \tilde{u} + ((\mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{b}})^T \nabla) \tilde{u} + \tilde{f} \tilde{u} = \tilde{g}$$

mit der Diagonalmatrix

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}^T \mathbf{A} \mathbf{S}, \qquad \mathbf{S}^T \mathbf{S} = \mathbf{I}$$

Dabei ist $\tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{y}) := \mathbf{b}(\mathbf{S}\,\mathbf{y})$ und

$$\tilde{f}(\mathbf{y}) := f(\mathbf{S}\,\mathbf{y}) \qquad \tilde{g}(\mathbf{y}) := g(\mathbf{S}\,\mathbf{y})$$

$$(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \end{pmatrix} u + (b_1, b_2) \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \end{pmatrix} u + fu = g$$

Beispiel:

Wir betrachten den Fall von zwei unabhängigen Variablen:

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_{12}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right) + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} +$$

$$\underbrace{b_1(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}} + \underbrace{f(x_1,x_2)u \;=\; g(x_1,x_2)}$$

Mit $\tilde{\mathbf{p}} := \mathbf{S}^T\tilde{\mathbf{b}}$ lautet die Diagonalform

$$\underbrace{\lambda_1\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_1^2} + \lambda_2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_2^2}} + \underbrace{\tilde{p}_1\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1} + \tilde{p}_2\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2}} + \tilde{f}\tilde{u} = \tilde{g}$$

Beachte:

Die Transformation auf Diagonalform ist keineswegs **eindeutig**, allerdings sind die beiden Koeffizienten des **Hauptterms** gerade die **Eigenwerte** der Ausgangsmatrix $\mathbf{A}$.

$$(\partial_{y_1}, \partial_{y_2}) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{y_1} \\ \partial_{y_2} \end{pmatrix} \tilde{u} + (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) \begin{pmatrix} \partial_{y_1} \\ \partial_{y_2} \end{pmatrix} \tilde{u} + \tilde{f}\tilde{u} = \tilde{g}$$

Definition: (Klassifikation partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung)

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla) u + (\mathbf{b}^t \nabla) u + f u = g$$

mit der konstanten und symmetrischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$.

1) Sind sämtliche Eigenwerte von $\mathbf{A}$ von Null verschieden und besitzen sie einheitliche Vorzeichen, so nennt man die Gleichung **elliptisch**.

2) Sind sämtliche Eigenwerte von $\mathbf{A}$ von Null verschieden, wobei ein Eigenwert ein anderes Vorzeichen als die übrigen $n-1$ Eigenwerte besitzt, so nennt man die Gleichung **hyperbolisch**.

3) Ist mindestens ein Eigenwert von $\mathbf{A}$ gleich Null, so nennt man die Gleichung **parabolisch**.

Klassifikation ist nicht vollständig, außer $n \leq 3$

Beispiel:

Wir betrachten wiederum den Fall von zwei unabhängigen Variablen:

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_{12}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right) + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} +$$
$$b_1(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2} + f(x_1,x_2)u \;=\; g(x_1,x_2)$$

Dann ist die **Diagonalform** gegeben durch:

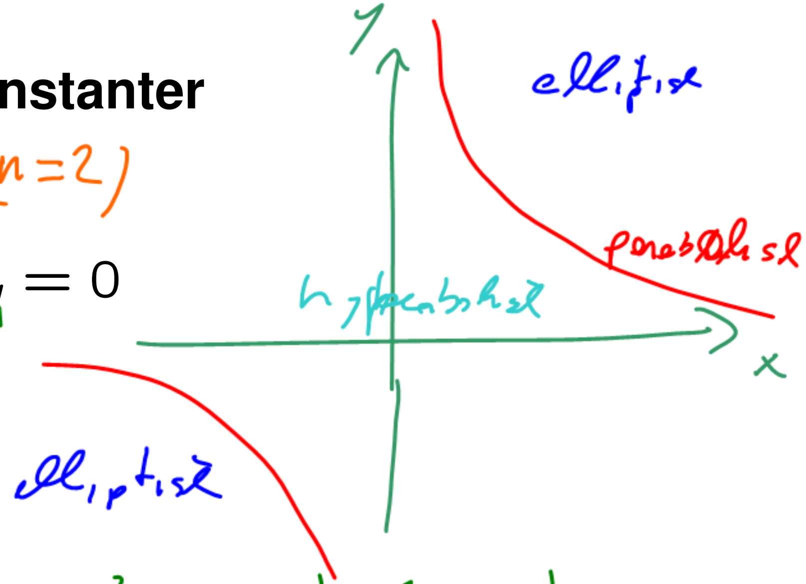
$$\lambda_1\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_1^2} + \lambda_2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_2^2} + \tilde{p}_1\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1} + \tilde{p}_2\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2} + \tilde{f}\tilde{u} = \tilde{g}$$

Die partielle Differentialgleichung heißt $n = ?$!

1) **elliptisch**, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ ist.
2) **hyperbolisch**, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ ist.
3) **parabolisch**, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ ist.

Bemerkung:

Die Typeneinteilung läßt sich auf Fälle mit **nichtkonstanter** Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ erweitern: die Gleichung $(n=2)$



$$\underline{y u_{xx} - u_{xy} - u_{yx} + x u_{yy}} = 0$$

hat die Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} y & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$$

Die Diskriminante D lautet daher $(y-\lambda)(x-\lambda)-1 = \lambda^2-\lambda(x+y)-\underline{(1-xy)}=0$

$$D = 1 - xy$$

Die Gleichung ist also **parabolisch** auf der Hyperbel $xy = 1$, **elliptisch** in den beiden konvexen Bereichen $xy > 1$ und **hyperbolisch** im zusammenhängenden Bereich $xy < 1$.

Beispiel:

Die Tricomi–Gleichung $n = 2$

$$k(y)u_{xx} - u_{yy} = g(x, y)$$

ist **elliptisch** für $k(y) < 0$, **hyperbolisch** für $k(y) > 0$ und **parabolisch** für $k(y) = 0$.

Zentrale Frage:

Wieso macht man eine solche Typeneinteilung?

Zentrale Antwort:

Jede Typenklasse hat charakteristisches Lösungsverhalten!

$n=2$ (o.B.d.A.)

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 \tilde u}{\partial y_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 \tilde u}{\partial y_2^2} + \dots$$

$$\pm A_1 \frac{\partial^2 \tilde u}{\partial y_1^2} \pm A_2 \frac{\partial^2 \tilde u}{\partial y_2^2} + \dots$$

ellipt., hyperbol.

$A_1 > 0,\ A_2 > 0$

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{A_1}}\, y_1 \qquad z_2 = \frac{1}{\sqrt{A_2}}\, y_2$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1} = \frac{1}{\sqrt{A_1}} \frac{\partial}{\partial z_1}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \quad \dots$$

$$\tilde{\tilde u}(z) = \tilde u(y)$$

$$\pm \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \tilde{\tilde u} \pm \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \tilde{\tilde u} + \dots$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\tilde u}_{z_1 z_1} + \tilde{\tilde u}_{z_2 z_2} = \Delta_z \tilde{\tilde u}$$

$$\tilde{\tilde u}_{z_1 z_1} \cancel{+} \tilde{\tilde u}_{z_2 z_2}$$

$\tilde{\tilde u}_{z_1 z_1}$ oder $\tilde{\tilde u}_{z_1 z_2}$

Normalformen partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung:

Definition:

1) Die Normalform einer **elliptischen** Differentialgleichung in n Variablen $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ ist

$$\Delta u + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + fu = g$$

2) Die Normalform einer **hyperbolischen** Differentialgleichung in $(n+1)$ Variablen $(\mathbf{x}, t) = (x_1, \ldots, x_n, t)^T$ ist

$$u_{tt} - \Delta u + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + fu = g$$

Hierbei bezeichnet Δ den Laplace–Operator bezüglich $\mathbf{x}$.

3) Die Normalform einer **parabolischen** Differentialgleichung in $(n+1)$ Variablen $(\mathbf{x}, t) = (x_1, \ldots, x_n, t)^T$ ist

Keine 2te Abl. bzgl. t

$$\Delta u + b_0 u_t + \sum_{i=1}^{n-1} b_i u_{x_i} + fu = g$$

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ +

wobei Δ wiederum den Laplace–Operator bezüglich $\mathbf{x}$ bezeichnet.

Klassische Beispiele:

1) **Elliptische** Laplacegleichung

$$\Delta u = 0,$$

2) **Hyperbolische** Wellengleichung

Quelle

$$\square u = u_{tt} - \Delta u = 0,$$

3) **Parabolische** Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \Delta u,$$

3.2 Korrekt gestellte Probleme

Definition:

Ein **korrekt gestelltes Problem** besteht aus einer in einem Gebiet definierten partiellen Differentialgleichung zusammen mit einer gewissen Menge von Anfangs– und/oder Randbedingungen, so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1) **Existenz:**
   Es existiert wenigstens eine Lösung, die alle Bedingungen erfüllt.

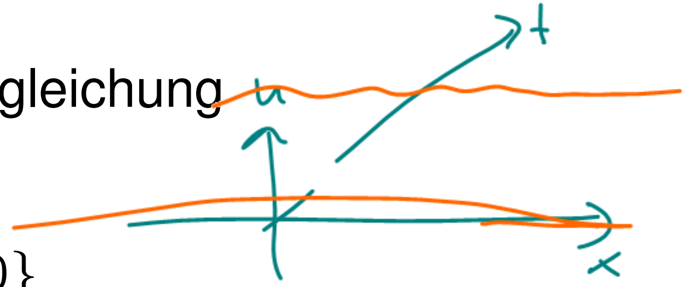
2) **Eindeutigkeit:**
   Die Lösung ist eindeutig.

3) **Stabilität:**
   Die Lösung hängt stetig von den Anfangs– bzw. Randbedingungen ab, d.h. geringfügige Änderungen in den Daten ergeben geringfügige Änderungen in der Lösung.

Eindimensionale Wellengleichung

Beispiel:

Das Anfangswertproblem für die eindimensionale Wellengleichung



$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0, u_t = v_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

ist ein **korrekt gestelltes** hyperbolisches Problem.

Physikalische Motivation:

Die Wellengleichung beschreibt das dynamische Verhalten einer eingespannten Saite, die zur Zeit $t = 0$

1) um die Funktion $u_0(x)$ ausgelenkt ist und

2) sich mit der Geschwindigkeit $v_0(x)$ bewegt.

✓ Existenz
✓ Eindeutig

Die eindeutig bestimmte Lösung ist (**Formel von d'Alembert**):

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(u_0(x-ct) + u_0(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi)\,d\xi$$

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \frac{1}{2}(c^2 u_0''(-) + c^2 u_0''(+)) + \frac{c}{2}(v_0'(x+ct) - v_0'(-)) - c^2(u_0''(-) + u_0''(+)) - \frac{c}{2}(v_0'(+) - v_0'(-)) = 0$

Stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten:

Sei $\tilde{u}(x,t)$ die Lösung zu den Anfangsdaten $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x,t) - u(x,t) &= \frac{1}{2}(\tilde{u}_0(x-ct) - u_0(x-ct)) \\ &+ \frac{1}{2}(\tilde{u}_0(x+ct) - u_0(x+ct)) \\ &+ \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} (\tilde{v}_0(\xi) - v_0(\xi))\,d\xi\end{aligned}$$

Daraus folgt aber

$$|\tilde{u}(x,t) - u(x,t)| \le \|\tilde{u}_0 - u_0\|_\infty + t\|\tilde{v}_0 - v_0\|_\infty$$

$$|\tilde{u}-u| \leq \frac{1}{2}\left| u_0(x-ct) - \tilde{u}_0(x-ct)\right| + \frac{1}{2}\left| u_0(x+ct) - \tilde{u}_0(x+ct)\right| + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} |\tilde{v}_0(\xi) - v_0(\xi)|\, d\xi$$

$$\leq \frac{1}{2}\underbrace{\sup_z |u_0(z) - \tilde{u}_0(z)|}_{\|u_0-\tilde{u}_0\|_\infty} + \frac{1}{2}\underbrace{\sup_z |u_0(z) - \tilde{u}_0(z)|}_{\|u_0-\tilde{u}_0\|_\infty} + \frac{1}{2c}\underbrace{\sup_z |\tilde{v}_0(z) - \tilde{v}_0(z)|}_{\|v_0-\tilde{v}_0\|_\infty}\underbrace{(x+ct-(x-ct))}_{2ct}$$

$$= \|u_0 - \tilde{u}_0\|_\infty + t\|v_0 - \tilde{v}_0\|_\infty$$

$$\sup_t |\tilde{u}-u| \leq \|u_0\|_\infty + t\|v_0\|_\infty$$

$$\|\tilde{u}-u\|_\infty \leq \|u_0-\tilde{u}_0\|_\infty + t\|v_0-\tilde{v}_0\|_\infty$$

Anfangswertaufgabe für die Laplacegleichung

Beispiel: (Hadamard)

Das Anfangswertproblem für die zweidimensionale Laplacegleichung

$$\Delta u = \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty) \\ u = u_0, u_y = v_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{y = 0\} \end{cases}$$

ist ein **nicht korrekt gestelltes** elliptisches Problem.

Setzen wir $u_0(x) = v_0(x) = 0$, so ist die eindeutig bestimmte Lösung gegeben durch

Wäre zu zeigen

$$\boxed{\Delta u = 0 \qquad U_0 = V_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad u(x, y) = 0}$$

Lauten die Anfangsdaten dagegen

$$\boxed{\Delta u = 0 \qquad u_o^n(x) = 0, \quad v_o^n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}} \longrightarrow$$

so ist die eindeutig bestimme Lösung zu den Anfangsdaten (u_0^n, v_0^n)

wie zu zeigen

$$\boxed{u^n(x,y) = \frac{1}{n^2}\,\mathrm{sin}(nx)\,\mathrm{sinh}(ny)}$$

$\Delta u^n = 0$

$u^n(x,0) = 0$

$u_y^n(x,0) = \frac{1}{n} \sin nx$

Nun gilt

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_0^n = u_0} \qquad \boxed{\lim_{n\to\infty} v_0^n = v_0}$$

Vergleicht man aber beide Lösungen, so ergibt sich wegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\,\mathrm{sinh}(ny) = \infty \qquad (y > 0)$$

$x \neq k\pi$

das Grenzverhalten

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} u^n(x,y)}_{=\infty} \neq \underbrace{u(x,y)}_{=0}$$

d.h. die Lösung hängt nicht stetig von den Anfangsdaten ab.