Whg.:

$$\left.\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0 \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &(x,t)\in \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ &t=0 \end{aligned}$$

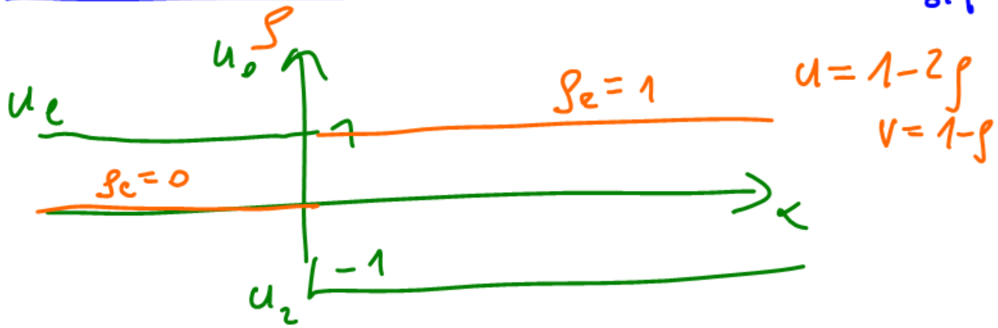
$$u_t + f'(u)u_x = 0$$

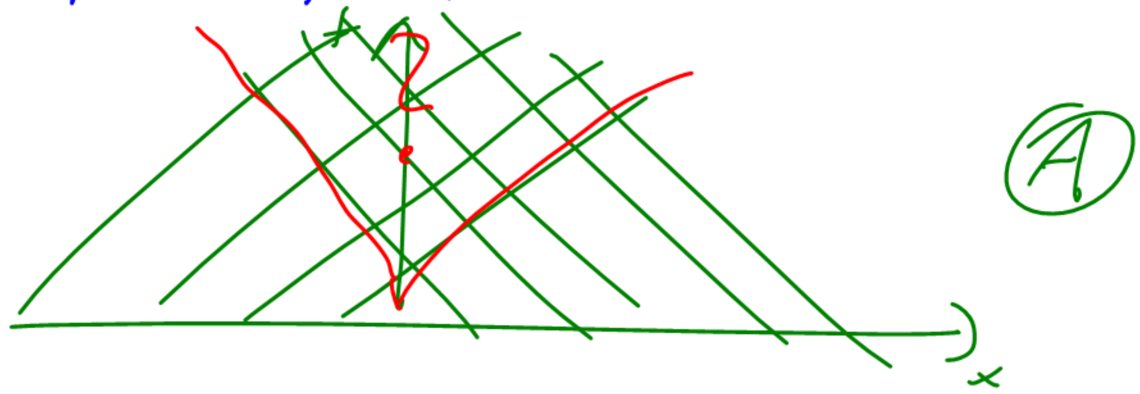
Spezialfall $f(u)=\frac{u^2}{2}$ (Burgers)

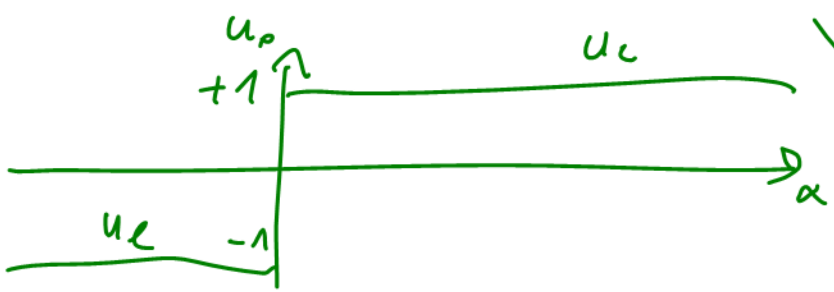
$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0$$

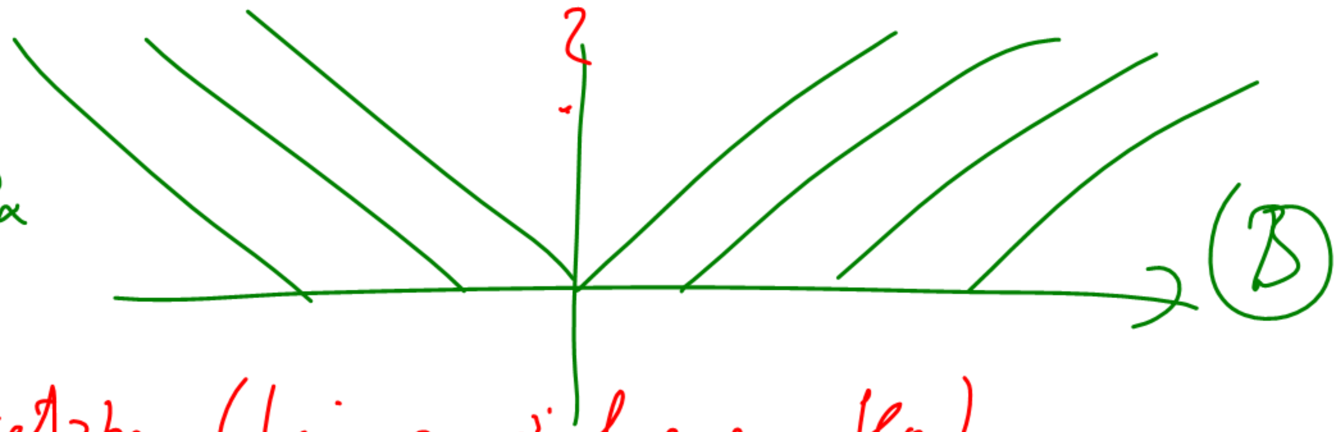
$$u_t + uu_x = 0$$

Meth. d. Charakteristiken: ... $\frac{dx(t)}{dt} = f(u(x(t),t)) = f(u_0(x_0))$ Geraden









Char.-Meth bedingt einsetzbar (bei quasilinearen Glen)

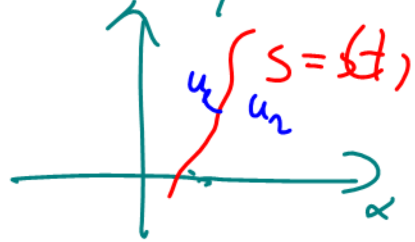
Ausweg:

Integrallösungen $\overset{\Leftarrow}{\not\Rightarrow}$ Klassische Lsg. (diffbar, einsetzen in die Gl.)

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(u v_t + f(u) v_x \right) dx\, dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\, v(x,0)\, dx = 0$$

$\forall$ Testfunktionen $v : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ glatt, kompakter Träger.

wir beschränken uns auf "unstetig entlang einer glatten Kurve, sonst klassisch"



Sprungbedingung (Rankine-Hugoniot)

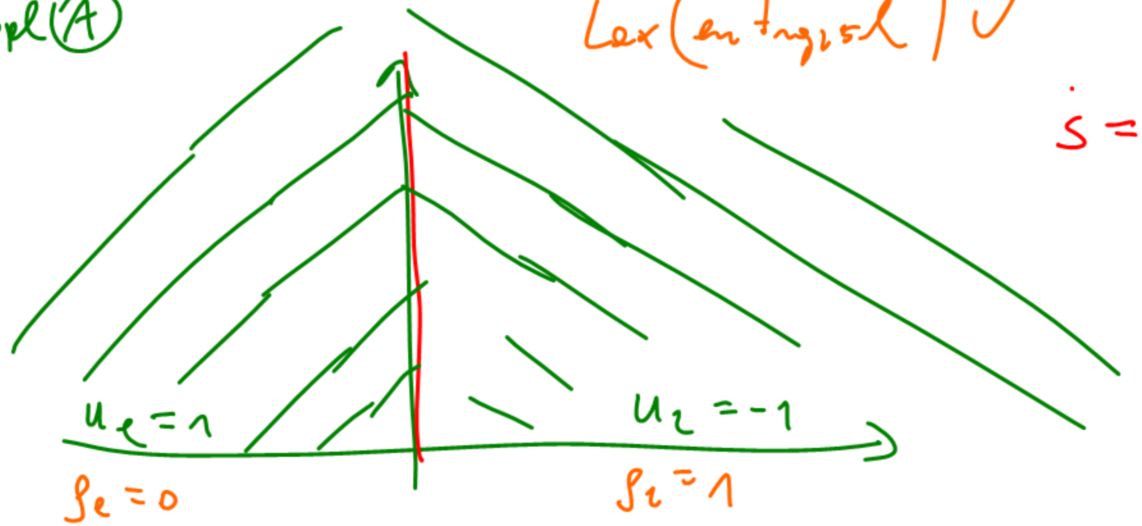
$\Longrightarrow$

$$\dot{s}(t) = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}$$

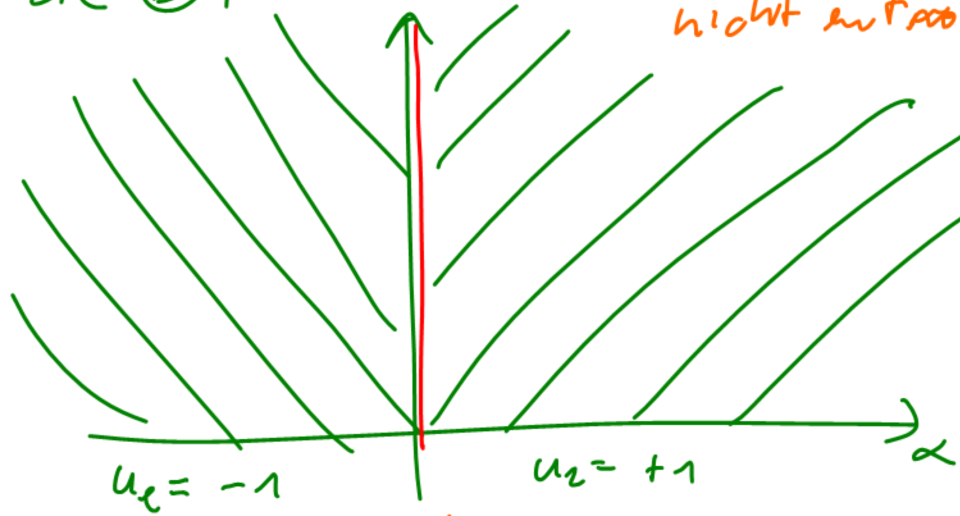
Bspl (A)

Lax (entropisch) ✓

$$\dot{s} = \frac{\frac{u_l^2}{2} - \frac{u_r^2}{2}}{u_l - u_r} = \frac{1}{2}(u_l + u_r) = 0$$

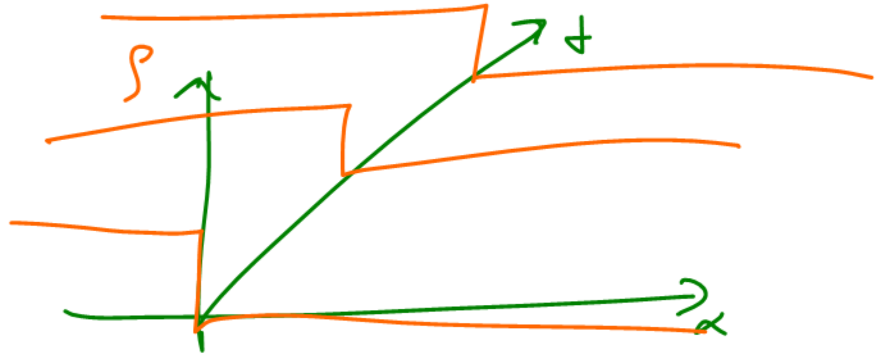


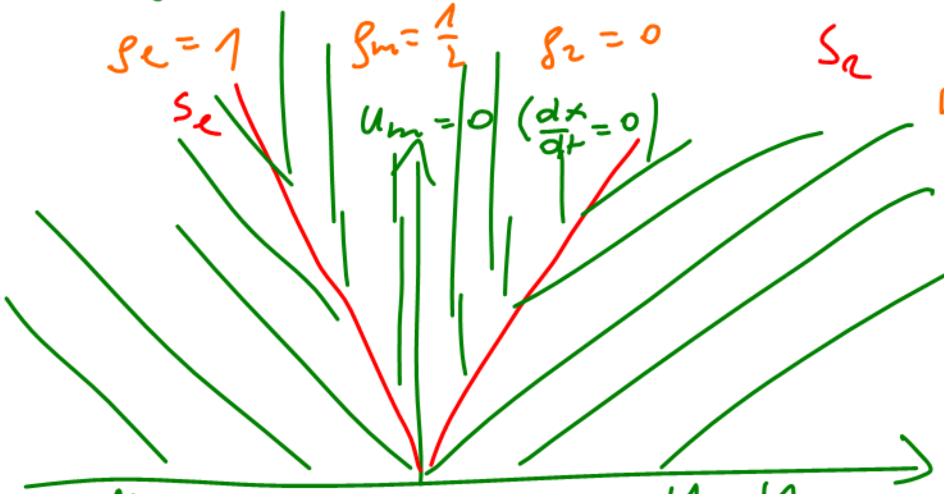
Bsp ⑮ :



$\rho_l = 1$ $\rho_m = \frac{1}{2}$ $\rho_r = 0$

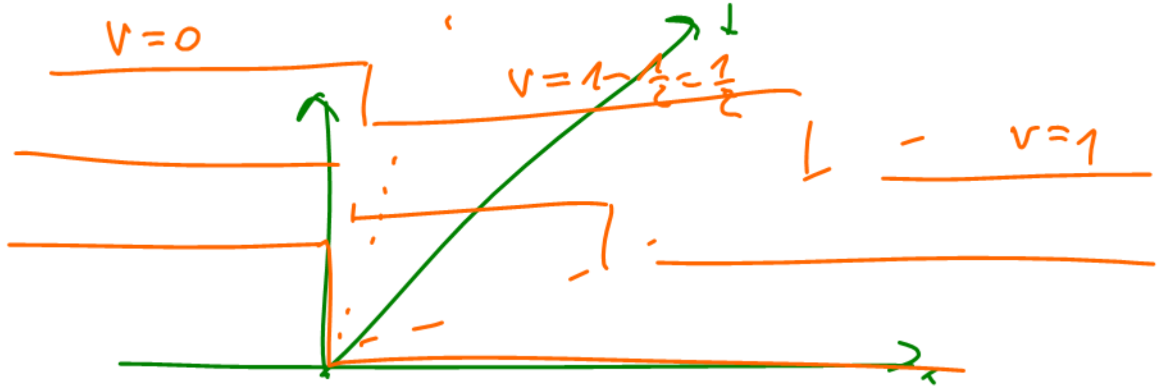
$$\dot{s}(t) = \frac{1}{2}(u_l + u_r) = 0$$

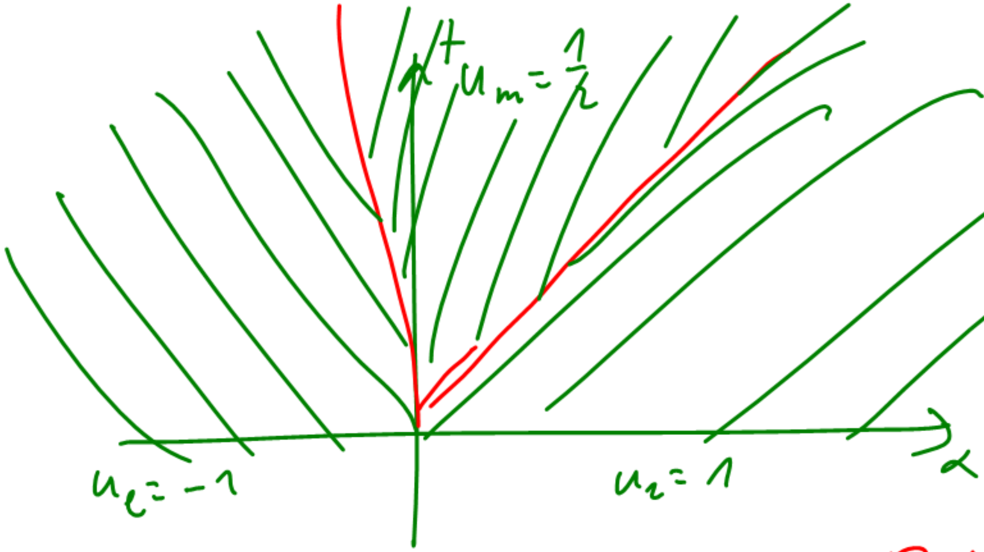




$$\dot{s}_l = \frac{1}{2}(u_l + u_m) = \frac{1}{2}(-1+0) = -\frac{1}{2}$$

$$\dot{s}_r = \frac{1}{2}(u_m + u_r) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$$





nicht entropisch

$$\dot{s}_\ell = \frac{1}{2}(u_\ell + u_m) = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$\dot{s}_r = \frac{1}{2}(u_m + u_r) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{4}$$

Mehrdeutigkeit schw. Lsg !!

Andere Lsgn?

Verdünnungswellen: $\xi = \frac{x}{t}$, $\xi = \text{const}$ entspricht einem Strahl aus dem Ursprung

Suchen Lsg., die nur von ξ abhängen

$$u(x,t) = \hat{u}\left(\frac{x}{t}\right) = \hat{u}(\xi)$$

$$u_t = \hat{u}'\left(\frac{x}{t}\right)\left(-\frac{x}{t^2}\right) = \hat{u}'(-\xi)\cdot\frac{1}{t}$$

$$u_x = \hat{u}'\left(\frac{x}{t}\right)\cdot\frac{1}{t}$$

$$0 \overset{!}{=} u_t + f'(u)u_x = \hat{u}'(-\xi)\frac{1}{t} + f'(\hat{u})\,\hat{u}'\frac{1}{t} = \frac{\hat{u}'}{t}\left(-\xi + f'(\hat{u}(\xi))\right) = 0$$

$\hat{u}' = 0$ (trivial)

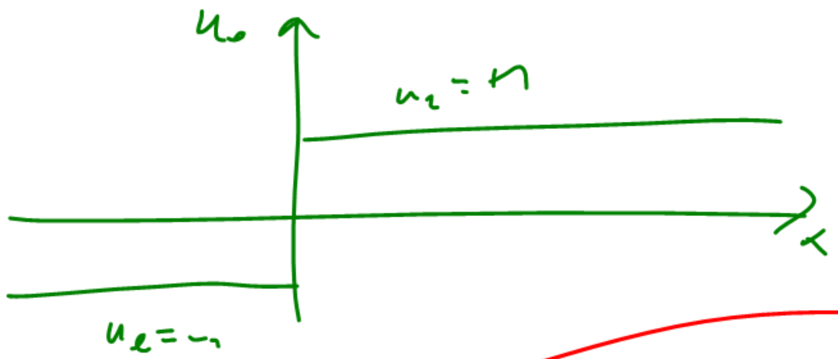
oder $\xi = f'(\hat{u}(\xi)) \Rightarrow \hat{u}(\xi) = (f')^{-1}(\xi)$

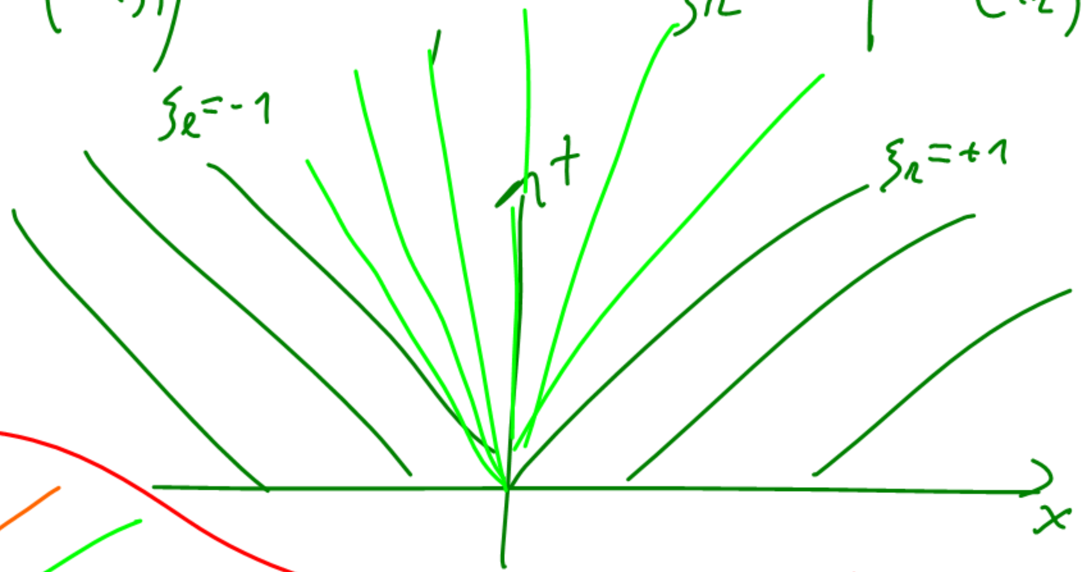
Umkehrfkt ex., falls Abl. von f' nicht verschwindet

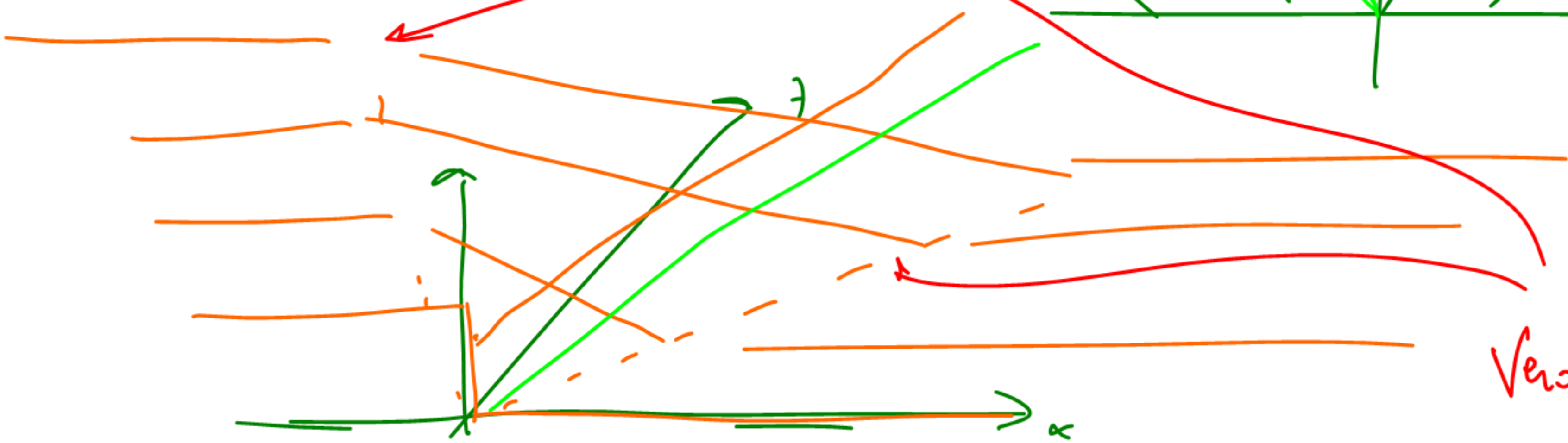
d.h. z.B. $f''>0$

Burgers $\quad f(u)=\frac{u^2}{2}, \quad f'(u)=u \qquad \hat{u}(\xi)=\xi$

$\xi_l = f'(u_l), \quad \xi = f'(\hat{u}(\xi)) \qquad \xi_r = f'(u_r)$







stetig

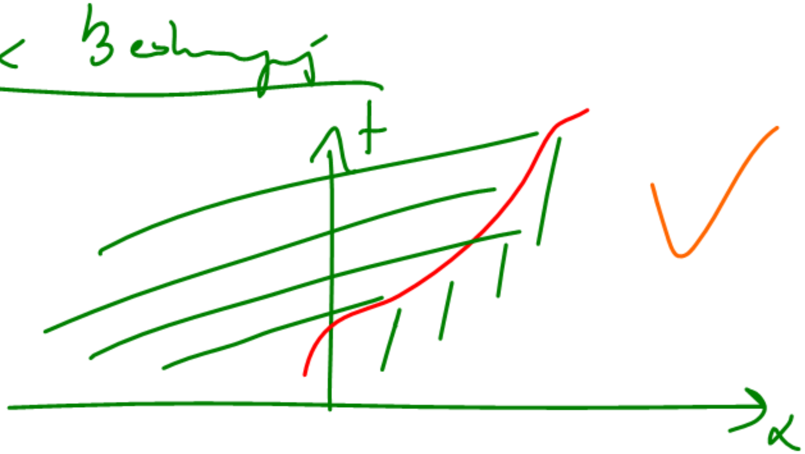
nicht diff'bar

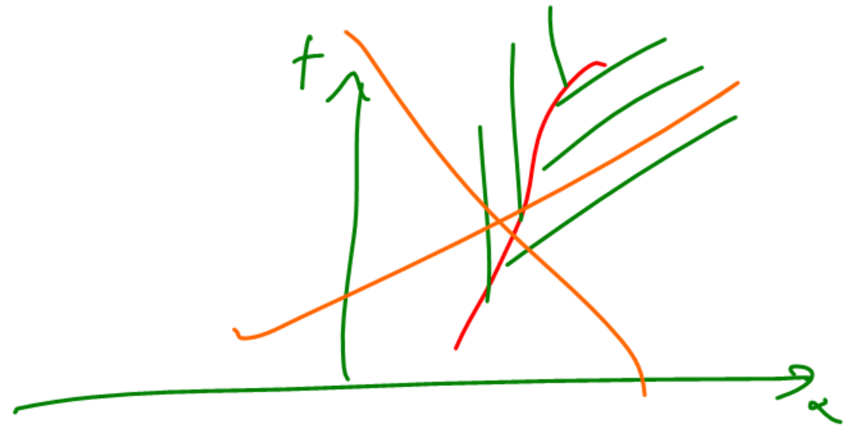
Verdünnungswelle

Wir führen zusätzliche Bedingung ein (Entropiebedingung)

diese Bed. sollte Eindeutigkeit erzeugen (die Lsg selektieren)

Lax Bedingung





eine Unstetigkeit ist zulässig (entropisch), falls die Charakteristiken "hineinfließen".

$$f'(u_l) > \dot{s} > f'(u_r)$$

für Burgers $f'(u) = u$

$$u_l > \dot{s} > u_r$$

Verkehrsentropie (Ansage)

Unstetigkeiten falls man in dichteren Verkehr reinfährt, sonst nicht.

$$\left.\begin{aligned} u^\varepsilon_t + f(u^\varepsilon)_x &= \varepsilon\, u^\varepsilon_{xx} \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned}\right\} (A^\varepsilon)$$

1. löse A^ε

2. $\varepsilon \to 0$ d.h. $u^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} u^0$

3. Hoffnung $u^0_t + f(u^0)_x = 0$

---

in Strömungsmechanik

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0$$

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2} + \ln \rho\right)_x = \nu\, u_{xx}$$

$\nu > 0$ Navier-Stokes

$\nu = 0$ Euler-gl.

Beschreibung der Verdünnungswelle

Wir betrachten das Riemannproblem

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit der unstetigen Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : \quad x \leq 0 \\ u_r & : \quad x > 0 \end{cases}$$

wobei nun $u_l < u_r$ gelte.

Zusätzlich nehmen wir an, dass $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ und $f'' > 0$ gilt, d.h. die Flussfunktion sei **strikt konvex**.

Schließlich setzen wir noch

$$g := (f')^{-1}$$

Nach Annahme ist die Flussfunktion f strikt konvex, d.h. f' ist streng monoton wachsend. Also gilt:

$$u_l < u_r \quad \Rightarrow \quad f'(u_l) < f'(u_r)$$

Es gibt daher **genau zwei** Typen von Charakteristiken, nämlich

$$x(t) = x_0 + f'(u_l)\,t \quad \text{und} \quad x(t) = x_0 + f'(u_r)\,t$$

Diese beiden Kurvenscharen füllen aber **nicht** den ganzen Raum $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ aus, sondern es entsteht ein Bereich Ω, der nicht durchlaufen wird:

$$\Omega := \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \ : \ f'(u_l) \cdot t < x < f'(u_r) \cdot t\}$$

In Ω liefert die Methode der Charakteristiken keine Werte und wir können im Prinzip die Lösung auf Ω mit einer beliebigen **Integrallösung** füllen.

Satz:
Für $u_l < u_r$ ist die **Verdünnungswelle** gegeben durch

$$u(x,t) := \begin{cases} u_l & : \; x < f'(u_l)t \\ g(x/t) & : \; f'(u_l)t < x < f'(u_r)t \\ u_r & : \; x > f'(u_r)t \end{cases}$$

eine Integrallösung des Riemannproblems. Insbesondere ist die Verdünnungswelle eine **stetige** Funktion.

Beweis:

Stetigkeit der Verdünnungswelle: Die kritischen Punkte liegen bei

$$x = f'(u_l)\,t \quad \text{und} \quad x = f'(u_r)\,t$$

Hier gilt

$$g\left(\frac{f'(u_l)\,t}{t}\right) = g(f'(u_l)) = (f')^{-1}(f'(u_l)) = u_l$$

sowie

$$g\left(\frac{f'(u_r)\,t}{t}\right) = g(f'(u_r)) = (f')^{-1}(f'(u_r)) = u_r$$

Weiter ist die Verdünnungswelle konstant für $x < f'(u_l)\,t$ und $x > f'(u_r)\,t$ und löst daher die vorgegebene Erhaltungsgleichung.

Für $f'(u_l)t < x < f'(u_r)t$ berechnet man

$$\begin{aligned} u_t &= -\frac{x}{t^2}g'(x/t) \\ f(u)_x &= f(g(x/t))_x = f'(g(x/t))\frac{g'(x/t)}{t} = \frac{x}{t^2}g'(x/t) \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $g(x/t)$ ebenfalls die Gleichung $u_t + f(u)_x = 0$ löst.

Mit der Stetigkeit folgt daraus, dass die Verdünnungswelle tatsächlich eine Integrallösung ist.

Problem: Integrallösungen sind nicht **eindeutig**!!

Beispiel:

Wir betrachten wieder die Burgers Gleichung mit der Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \le 0 \\ 1 & : \quad x > 0 \end{cases}$$

Dann erhalten wir zum Beispiel die beiden Integrallösungen

$$u_1(x,t) = \begin{cases} 0 & : \quad x \le t/2 \\ 1 & : \quad x > t/2 \end{cases}$$

und

$$u_2(x,t) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 0 \\ x/t & : \quad 0 \le x \le t \\ 1 & : \quad x > t \end{cases}$$

Die erste Lösung repräsentiert eine Stoßwelle, die zweite eine Verdünnungswelle.

Welche der beiden ist die physikalisch richtige Lösung?

Man benötigt eine Zusatzbedingung, die die physikalisch richtige Integrallösung aussucht.

Definition:

Eine Integrallösung heißt **Entropielösung**, falls die Lösung die folgende **Entropiebedingung** (Lax–Oleinik–Bedingung) erfüllt:

$$\exists\, C > 0, \text{ sodass für alle } x, z \in \mathbb{R},\ t > 0 \text{ mit } z > 0 \text{ gilt}$$

$$u(t, x + z) - u(t, x) < \frac{C}{t} z$$

Satz:

Erfüllt eine Integrallösung die oben angegebene Entropiebedingung, so ist diese Lösung eindeutig, d.h. Entropielösungen sind eindeutige Lösungen.

Kapitel 3: Partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung

Definition: Eine lineare PDE 2. Ordnung in n Variablen ist gegeben durch

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + fu = g$$

Dabei sind die Terme a_{ij}, b_i, f und g Funktionen von $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$.
Den ersten Term nennt man den **Hauptteil** der PDE. Weiter gelte oBdA

$$a_{ij}(\mathbf{x}) = a_{ji}(\mathbf{x}), \quad i, j = 1, \ldots, n$$

Spezialfall:

Gilt $a_{ij} =$ const., $i, j = 1, \ldots, n$, so läßt sich die PDE auch in folgender Matrixschreibweise darstellen:

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla) u + (\mathbf{b}^t \nabla) u + fu = g$$

mit der symmetrischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$.

falls $a_{13} = 2$, $a_{31} = 4$ $\qquad a_{13} u_{x_1 x_3} + a_{31} u_{x_3 x_1} = \frac{a_{13}+a_{31}}{2} (u_{x_1 x_3} + u_{x_3 x_1})$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, u_{x_i x_j} = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i}\left(a_{ij}\, u_{x_j}\right) = \operatorname{div}\left(A \nabla u\right)$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i}\left(a_{ij}(x)\, u_{x_j}\right) - \sum_{i,j=1}^{n}\left(\partial_{x_i} a_{ij}(x)\right) u_{x_j}$$

$$= \operatorname{div}\left(A \nabla u\right) - b(x) \cdot \nabla u$$

2.te Abl. 1. Abl.