Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Ingenuin Gasser

Fachbereich Mathematik

Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg

Sommersemester 2016

nach Vorlage von Jens Struckmeier (SS 2007)

VO DGL II SS 2016 TUHH

Vo + Anl + Ue

Sprechstunde
Di: 8:30 – 10:30
Rm 3079

Klausur
80 % Rechenbsple
20 % Verständnis fragen

Literatur:

*) Das gelbe Rechenbuch (Furlan)
*) Partial Differential Equations (Evans)
*) Aussage-Obele
*) Schaum outline PDE Partial Differential Equations
*) Burg, Graf, ..., Meister, ... Band 4

Themen:

*) 1. Ordnung (linear, nicht linear)
*) Laplace (Poisson)
*) Wärmeleitungsgl
*) Wellengl

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t}\rho\, dx = \frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} \rho\, dx = -q(x_2,t) + q(x_1,t) = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} q\, dx$$

$\forall\, [x_1, x_2]$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x} q = 0}$$

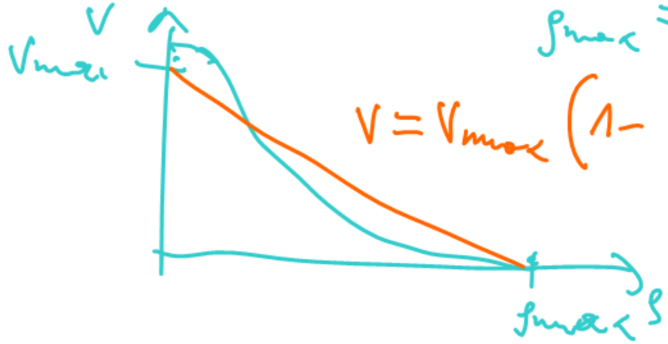
$v := \frac{q}{\rho}$ $\qquad [v] = m s^{-1}$

$q = \rho v$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0$$

<u>Greenshields</u> Zusammenhang

(Keine Physik!)



$\rho_{max} = 0.2\ \frac{Fz}{m}$

$$v = v_{max}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + v_{max}\left(\rho\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right)\right)_x = 0$$

$v_{max} = 1 \qquad \rho_{max} = 1$

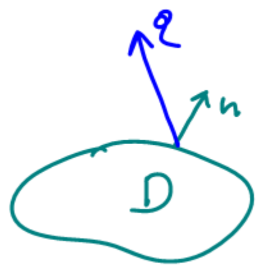
$$\boxed{\rho_t + (\rho(1-\rho))_x = 0}$$

Motivation

i) Reynold Transportsatz

ii) über Gauss   Gebiet D

$u = u(x,t)$



fest in der Zeit

$$\boxed{\int_D \frac{\partial}{\partial t} u \, dx} = \frac{d}{dt} \int_D u(x,t)\, dx = -\int_{\partial D} n \cdot q \, dS \underset{\text{Gauss}}{=} -\int_D \operatorname{div} q \, dx$$

$\forall D$

$$\int_D \left(\frac{\partial}{\partial t} u + \operatorname{div} q \right) dx = 0 \quad \forall D \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_t + \operatorname{div} q = 0}$$

Physik   Wärmelehre $q = -\lambda \nabla u$

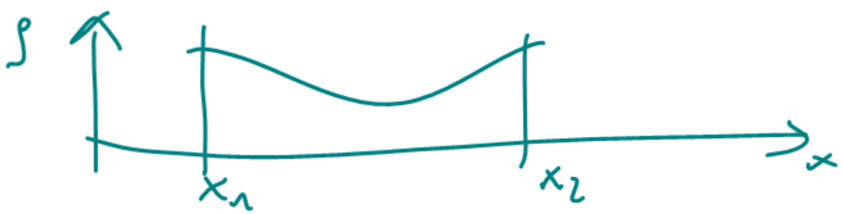
u Temp.

q Wärmefluß

$$u_t = -\operatorname{div} q = \lambda \operatorname{div} \nabla u = \lambda \Delta u \qquad \boxed{u_t = \lambda \Delta u}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} u = \Delta u$$

ii) noch einfacher 1dimensional $[\rho] = Fz/m$ $[q] = Fz/s$ Fluß



zu Klassifikation

		(x,y)	(u Skalar)	(höchste Ableitung)
$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$	linear	$n = 2$	$m = 1$	$p = 2$
		(t,x)		
$u_t + u_x = 0$	linear	$n = 2$	$m = 1$	$p = 1$

ρ Dichte, u Geschwindigkeitsfeld, p Druck z.B. $p(\rho) = \rho$ isotherm

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0$$

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x + (p(\rho))_x = \begin{cases} 0 \\ \nu u_{xx} \end{cases}$$

Eulergl. d. Gasdynamik quasilinear

Navier Stokes Gl. d. Gasdyn. semilinear

(x,t) $\begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}$

$n = 2$	$m = 2$	$p = 1$
$n = 2$	$m = 2$	$p = 2$

~~quasi~~

$\left(\frac{u^2}{2}\right)_x = u u_x \qquad p(\rho)_x = p'(\rho)\rho_x$

2.2 Anfangswertprobleme bei Gleichungen 1. Ordnung

Wir betrachten nun den in Anwendungen häufig auftretenden Fall einer Zeitvariablen t und n Ortsvariablen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Definition: Das auf ganz $\mathbb{R}^n$ definierte Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, t, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, t, u) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

bezeichnet man als ein **Cauchy–Problem**.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Anfangsbedingung

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x})$$

explizit vorgegeben.

Die konkreten Lösungen lassen sich dann wiederum mit Hilfe des Charakteristikenverfahrens berechnen.

Ein typisches **Beispiel** ist die Transportgleichung aus Kapitel 1:

$$\begin{cases} u_t + \mathbf{a} \cdot \nabla u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit dem konstanten Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

Verwenden wir hier die Methode der Charakteristiken, so erhalten wir zunächst die $(n+1)$ Differentialgleichungen

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \qquad \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{a}$$

und wir können ohne Einschränkung $t = \tau$ annehmen.
Die Lösung der zweiten Gleichung lautet dann

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a} \cdot t,$$

mit einer Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Die charakteristischen Kurven sind also gerade Geraden, die zur Zeit $t = 0$ den Punkt $\mathbf{x}_0$ durchlaufen und in Richtung $\mathbf{a}$ laufen.

Möchte man die Lösung an einem Punkt $(\mathbf{x}, t)$ bestimmen, so sucht man zunächst die zugehörige Charakteristik, die durch diesen Punkt läuft und den Wert $\mathbf{x}_0$ zur Zeit $t = 0$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a}t \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x} - \mathbf{a}t$$

Da die Lösung entlang der Charakteristiken konstant bleibt, folgt sofort die Lösungsdarstellung

$$u(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x} - \mathbf{a}t)$$

Interpretation dieser Lösung:

Das gegebene Anfangsprofil $u_0(\mathbf{x})$ wird mit der konstanten Geschwindigkeit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ weitertransportiert, ohne seine Form zu ändern.

Probe:

Es gilt:

$$u_t(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{a}\nabla u_0,\ \nabla u(\mathbf{x}, t) = \nabla u_0 \quad \Rightarrow \quad u_t + \mathbf{a} \cdot \nabla u = 0$$

$$1\cdot u_t + a\cdot\nabla u = 0$$

$\frac{dt}{d\tau} = 1 \Rightarrow t = \tau + t_0$ setze $t_0 = 0 \Rightarrow \tau = t$ $\quad x = x(t)$

also bei $(u_t + t \ldots)$ kann man mit t parametrisieren

setze $x = x(t)$

$$\hat{u}(t) = u(x(t),t)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{u}(t) = \frac{d}{dt} u(x(t),t) = u_t + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{dx_i}{dt}}_{\overset{?}{=} a_i} u_{x_i} = u_t + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} = u_t + a\cdot\nabla u = 0$$

$\frac{dx_i}{dt} = a_i \qquad x_i(t) = a_i t + x_0$ Geraden

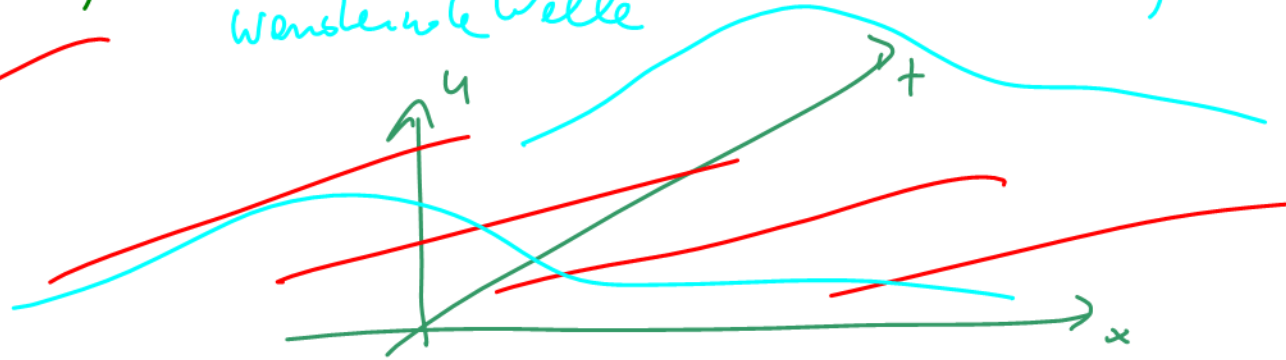
$$\boxed{u(x(t),t) = u(x(0),0) = u_0(x(0)) = u_0(x_0) = u_0(x-at)}$$

1 dimensional

$u_t + a u_x = 0 \qquad u(x,t) = u_0(x-at)$

also

wandernde Welle (weil linear a konstant)



Beispiel: Wir betrachten das Anfangswertproblem linear,

$$\begin{cases} u_t + tx u_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = \sin x & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases} \quad u_0(x) = \sin x$$

Die charakteristische Gleichung lautet dann

$\ln \frac{x}{x_0} = \frac{t^2}{2} - \frac{0^2}{2}, \quad (\ln x)' = \frac{\dot{x}}{x} = t$

$$\dot{x} = tx, \qquad x(0) = x_0$$

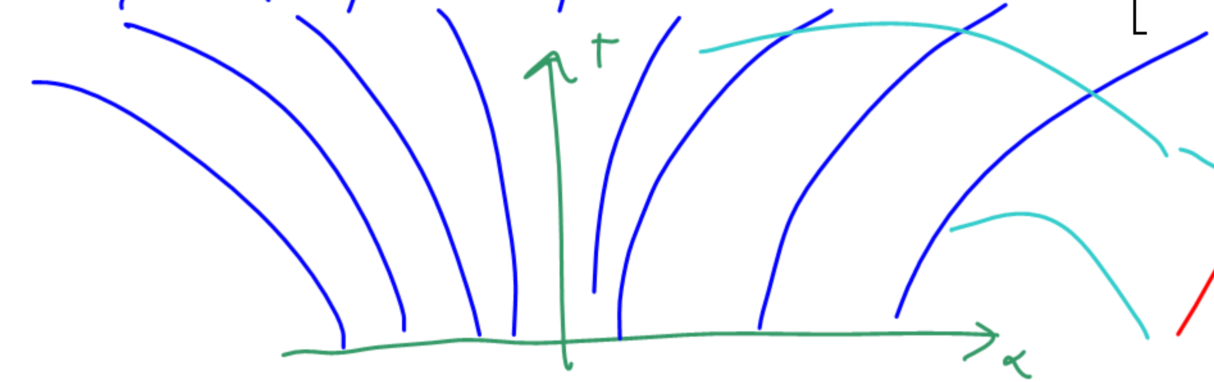
und besitzt die Lösung

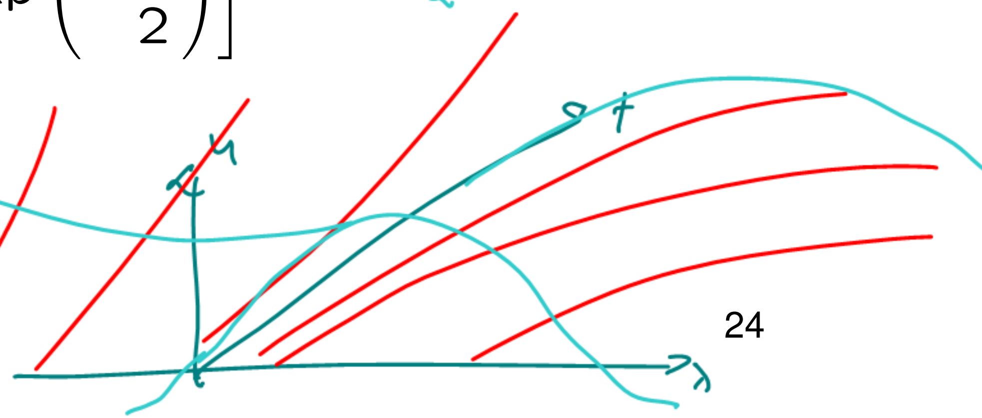
$$x(t) = x_0 \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \quad \rightarrow \quad x_0 = x(t)\, e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Daraus folgt die Lösungsdarstellung des Anfangswertproblems:

$$u(x,t) = u(x_0, 0) = u_0(x_0) = \sin(x_0) \quad \cancel{u(x,t)} = \sin\left[x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\right]$$

! keine wandernde Welle
a nicht konstant





$\hat{u}(t) = u(x(t),t)$

Ansatz $x = x(t)$

$$\frac{d}{dt}\hat{u} = \frac{d}{dt}u(x(t),t) = u_t + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{dx_i}{dt}}_{= a_i} u_{x_i} = u_t + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} = b$$

Wir kehren zu dem anfangs definierten Cauchy–Problem

$$\begin{cases} u_t + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, t, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, t, u) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

zurück.

Das charakteristische System lautet dann

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{a}(\mathbf{x}, t, u) \\ \dot{u} &= b(\mathbf{x}, t, u) \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ und $u(0) = u_0(\mathbf{x}_0)$.

Dies ist ein gekoppeltes nichtlineares Differentialgleichungssystem, das unter Umständen nur lokale Lösungen in der Zeit besitzt. Im Allgemeinen wird daher die Methode der Charakteristiken nur lokal in der Zeit eine Lösung liefern.