Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2016**
Prof. Dr. I. Gasser
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5

Aufgabe 17:

a) Man zeige, dass der Laplace-Operator im $\mathbb{R}^2$ invariant gegenüber Verschiebungen ist, d.h. für die um $(a,b)^T$ verschobenen Koordinaten

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

gilt $u_{xx} + u_{yy} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}$.

b) Unter Verwendung der Mittelwerteigenschaft berechne man für die Lösung u des Problems

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \quad &\text{für} \quad (x+1)^2 + (y-2)^2 + (y+3)^2 < 4\,, \\ u(x,y,z) = xyz \quad &\text{für} \quad (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 4 \end{aligned}$$

den Wert $u(-1,2,-3)$.

Aufgabe 18: (Klausur WiSe 01/02)

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für die folgende Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} && \text{für} \quad 0 < x < 3\,, \\ & && \phantom{\text{für}} \quad 0 < t \le T\,, \\ u(0,t) &= 0 = u(3,t) && \text{für} \quad 0 \le t \le T \\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{für} \quad 0 \le x \le 3 \end{aligned}$$

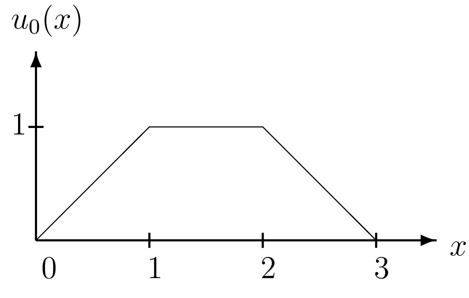

Bild 18 Anfangsfunktion u_0

und bestimme den Maximalwert der Lösung u im Gebiet $[0,3] \times [0,T]$.

Aufgabe 19: (Klausur SoSe 02)

Gegeben sei die folgende Anfangsrandwertaufgabe für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= 3u_{xx} \quad \text{für} \quad 0 < x < \pi\,, \quad 0 < t\,, \\ u(0,t) &= 1\,, \quad u(\pi,t) = -1 \quad \text{für} \quad 0 \le t\,, \\ u(x,0) &= \cos x \quad \text{für} \quad 0 \le x \le \pi\,. \end{aligned}$$

a) Man transformiere das gegebene Problem in u zuerst in ein Problem in v mit homogenen Randbedingungen.

b) Man löse das transformierte Problem in v.

Hinweis: Es darf die sich aus dem Produktansatz ergebende Lösungsdarstellung verwendet werden.

c) Man gebe die Lösung u an.

d) Man bestimme den maximalen Funktionswert von u im zu Grunde liegenden Gebiet $G := [0,\pi] \times [0,\infty[$.

Aufgabe 20:

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für folgende Wärmeleitungsgleichung mit Hilfe eines Produktansatzes:

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u && \text{für} \quad (x,y) \in]0,1[\times]0,3[,\ 0 < t\,, \\ u(0,y,t) &= 0 = u(1,y,t) && \text{für} \quad y \in [0,3]\,, \quad 0 \le t\,, \\ u(x,0,t) &= 0 = u(x,3,t) && \qquad x \in [0,1]\,, \quad 0 \le t\,, \\ u(x,y,0) &= (3\sin \pi x - \sin 3\pi x)\sin \pi y && \text{für} \quad (x,y) \in [0,1] \times [0,3]\,. \end{aligned}$$

Man zeichne die Lösung u für $t = 0, \frac{1}{80}, \frac{1}{20}, \frac{1}{5}$. Wie verhält sich die Lösung für $t \to \infty$?

Abgabetermin: 13.6.-17.6. (zu Beginn der Übung)