

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 9:

Gegeben sei das Anfangswertproblem für die Burgers-Gleichung

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{für } (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T)$$

mit

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x \leq -1 \\ 1 & , \quad -1 < x \leq 1 \\ 0 & , \quad 1 < x \end{cases}$$

- a) Man berechne die Entropielösung für $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, 4)$.
- b) Man zeichne die Grundcharakteristiken ggf. mit Stoßfront im Rechteck $(x, t) \in (-2, 3) \times (0, 4)$.
- c) Man zeichne $u(x, 0)$, $u(x, 1)$, $u(x, 2)$, $u(x, 3)$, $u(x, 4)$.

Aufgabe 10:

Man bestimme den Typ der folgenden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und skizziere im $\mathbb{R}^2$ gegebenenfalls die Gebiete unterschiedlichen Typs:

- a) $3u_{xx} + 4u_{xy} - xu_x = x^2y$,
- b) $xu_{xx} + 4u_{xy} + yu_{yy} + (x^2 + y^2)u = 3$,
- c) $u_{xx} + 2u_{xz} + 2u_{yy} - u_{zz} + zu_x + xu_y + yu_z - u = 7$.

Aufgabe 11:

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{14}{5}u_{xx} - \frac{4}{5}u_{xy} + \frac{11}{5}u_{yy} + 2\sqrt{5}u_x - \sqrt{5}u_y + 3u = x$$

- a) Man bestimme den Typ der Gleichung und
- b) transformiere sie auf Normalform.

Aufgabe 12:

- a) Man zeige, dass die Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ folgende allgemeine Lösung besitzt:

$$u(x, t) = v(x + ct) + w(x - ct), \quad v, w \in C^2.$$

Tipp: Man transformiere u auf die Koordinaten $\xi = x + ct$ und $\eta = x - ct$ und berechne die allgemeine Lösung der transformierten Differentialgleichung.

- b) Man zeige, dass die folgende Randwertaufgabe für die Wellengleichung keine Lösung besitzt.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, & 0 < x, t < 1 \\ u(x, 0) &= x, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(x, 1) &= 1 + x(x - 1), \\ u(0, t) &= t, & 0 \leq t \leq 1, \\ u(1, t) &= 1. \end{aligned}$$

Man überprüfe auch, ob die vorgegebenen Randwerte in den Eckpunkten verträglich sind.

Abgabetermin: 9.5.-13.5. (zu Beginn der Übung)