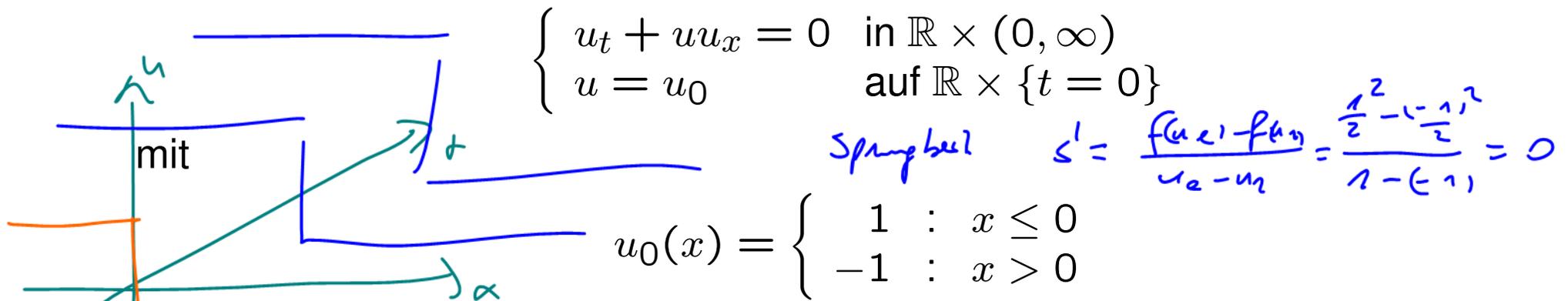


Beispiel: Wir betrachten das Problem

$$au_x = \left(\frac{u^2}{2}\right)_x \quad f(u) = \frac{u^2}{2}$$



Die Anfangsbedingung ist gleichzeitig die Lösung für $t > 0$!

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{k}{2h} \left(\frac{(U_{i+1}^j)^2}{2} - \frac{(U_{i-1}^j)^2}{2} \right)$$

$$U_i^0 = \begin{cases} 1 & : i < 0 \\ 0 & : i = 0 \\ -1 & : i > 0 \end{cases}$$

Fazit: Funktioniert nicht, Verfahren ist **instabil**

Beispiel: Wir betrachten die lineare Advektionsgleichung

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

$u(x,t) = u_0(x-t)$
 $\frac{u_{i+2}^j - u_{i-1}^j}{2h}$

Zentrale Differenzen im Ort:

CLAWPACK

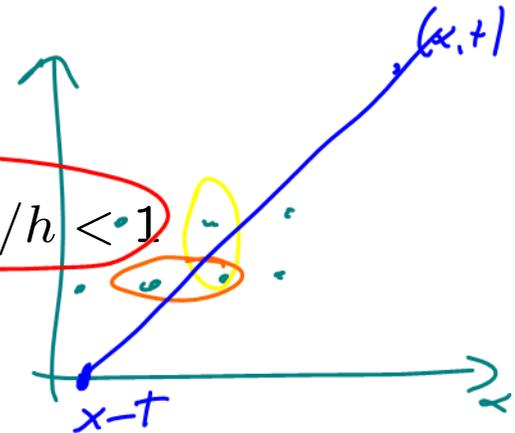
$\frac{u_{i+2}^{j+1} - u_{i-1}^j}{k}$

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{k}{2h} (U_{i+1}^j - U_{i-1}^j)$$

Funktioniert selbst bei einer linearen Gleichung nicht!

Upwind-Verfahren: funktioniert unter der CFL-Bedingung $k/h < 1$

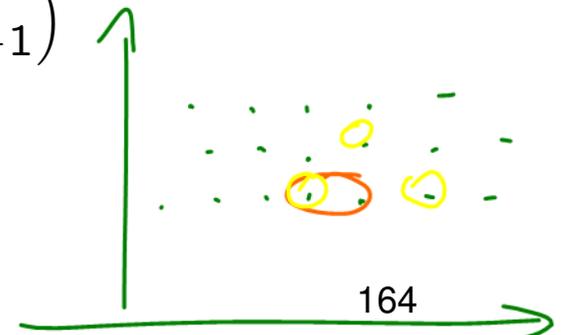
$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{k}{h} (U_i^j - U_{i-1}^j)$$



Lax-Friedrichs-Verfahren: funktioniert wie das Upwind-Verfahren

$$U_i^{j+1} = \frac{U_{i+1}^j + U_{i-1}^j}{2} - \frac{k}{2h} (U_{i+1}^j - U_{i-1}^j)$$

$u_t \sim \frac{u_i^{j+1} - \frac{u_{i+1}^j + u_{i-1}^j}{2}}{k}$



Zeitrolle differenzen

$$u_t + u_x = 0$$

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{k}{2h} (u_{i+1}^j - u_{i-1}^j)$$

$$\begin{pmatrix} u_{i-1}^{j+1} \\ u_i^{j+1} \\ u_{i+1}^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & \boxed{\begin{matrix} 1 & -f \\ f & 1 \end{matrix}} & -f \\ & & f & 1 & -f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i-1}^j \\ \vdots \\ u_i^j \\ \vdots \\ u_{i+1}^j \end{pmatrix}$$

Zeitlevel $j+1$
 U^{j+1}

A

U^j

$$U^N = A U^{N-1} = A^2 U^{N-2} = \dots = A^N \underbrace{U^0}_{AB}$$

Ziel EW von A $|\lambda_i| < 1$

$\leftarrow |\lambda_{1,2}| > 1$

$$\det \begin{vmatrix} 1-\lambda & -f \\ f & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + f^2 = 0$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 + f^2$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 1 - f^2} = 1 \pm if$$

$$u_t + u_x = 0$$

(upwind)

$$\begin{pmatrix} | \\ | \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 1-2f & 0 \\ 2f & 1-2f \\ 2f & 1-2f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ | \\ | \end{pmatrix}$$

$$|\lambda_{1,2}| = |1-2f| < 1$$

falls

~~falls~~

$$f \leq 1$$

!

Falls $f < 0$ (upwind falsch nur)

$$|\lambda_{1,2}| > 1$$

instabil

Finite-Differenzen für die Poissongleichung

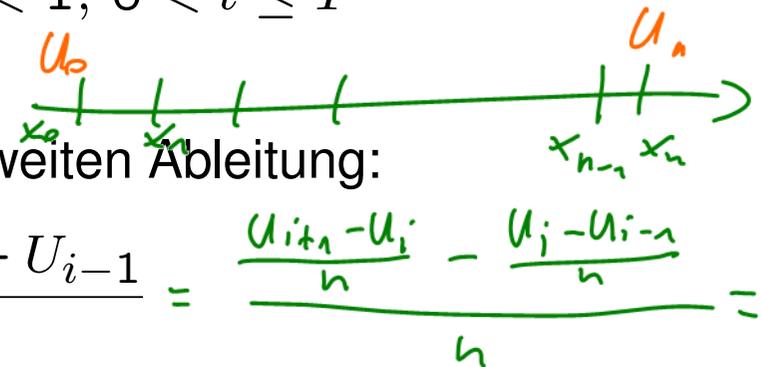


RB U_0, U_n gegeben

Wir betrachten jetzt Randwertprobleme für die **Poissongleichung**, also

$$\begin{cases} -u_{xx} = f(x) & : 0 < x < 1, 0 < t \leq T \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Zunächst benötigen wir eine Approximation der zweiten Ableitung:



$$u_{xx}(x_i) \approx \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} = \frac{\frac{U_{i+1} - U_i}{h} - \frac{U_i - U_{i-1}}{h}}{h}$$

Damit erhalten wir die diskreten Gleichungen

$$\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} = F_i, \quad i = 1, \dots, n-1$$

mit $h = 1/n$ und

$$F_i := f(x_i), \quad U_0 = U_n = 0$$

$$u_2 - 2u_1 = h^2 F_1 - u_0$$

$$u_3 - 2u_2 + u_1 = h^2 F_2$$

$$u_4 - 2u_3 + u_2 = h^2 F_3$$

$$\vdots$$
$$-2u_{n-1} + u_{n-2} = h^2 F_{n-1} - u_n$$

Setzen wir

$$\mathbf{x} = (u_1, \dots, u_{n-1})^T, \quad \mathbf{b} = (F_1, \dots, F_{n-1})^T$$

so erhalten wir das **lineare Gleichungssystem**

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

mit der Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

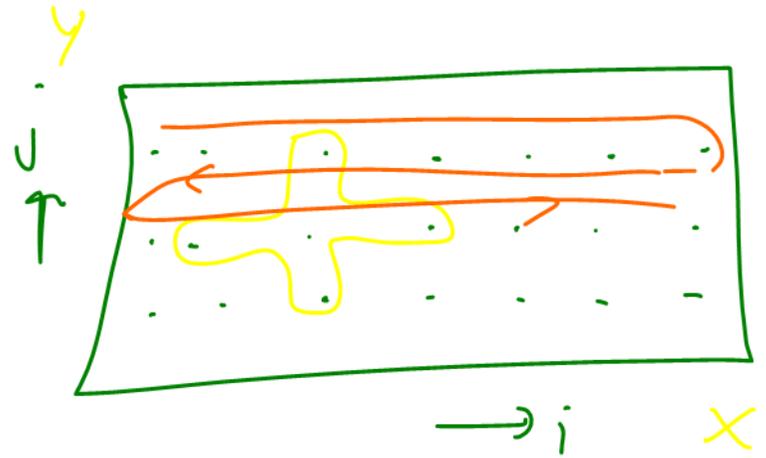
Fazit:

Die numerische Lösung der Poissongleichung reduziert sich auf ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten u_1, \dots, u_{n-1} .

$$-\Delta u = f$$

$$\frac{u_{i+n,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+n} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = f_{i,j}$$

u_{xx} u_{yy}

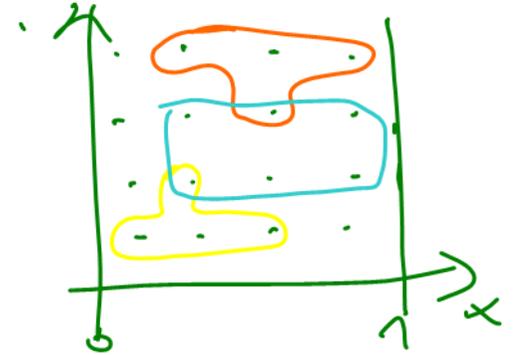


$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & -4 & 1 & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

Finite-Differenzen für die Wärmeleitungsgleichung

Zur numerischen von Anfangsrandwertproblemen der Form

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & : 0 < x < 1, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$



müssen wir Diskretisierungen für die zweite Ableitung u_{xx} mit einer Differenzenapproximation für die Zeitableitung u_t kombinieren:

1) Setzen wir eine Vorwärtsdifferenz an, also

$$u_t(x_i, t_j) = \frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k}$$

so erhalten wir das **explizite Verfahren**

$$U_i^{j+1} = U_i^j + \frac{k}{h^2} (U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j)$$

2) Mit der Rückwärtsdifferenz

$$u_t(x_i, t_j) = \frac{U_i^j - U_i^{j-1}}{k}$$

erhalten wir das **implizite Verfahren**

$$U_i^{j+1} = U_i^j + \frac{k}{h^2} (U_{i+1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1})$$

Fazit: Zur Berechnung der Lösung zur Zeit t_{j+1} muß ein lineares Gleichungssystem gelöst werden!

3) Eine Konvexkombination beider Verfahren liefert die θ -Methode

$$U_i^{j+1} = U_i^j + \frac{k}{h^2} [\theta (U_{i+1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1}) + (1 - \theta) (U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j)]$$

Im Fall $\theta = \frac{1}{2}$ erhält man das **Crank–Nicholson–Verfahren**.

Bemerkungen:

- 1) Das explizite Verfahren funktioniert nur unter der Bedingung:

$$\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

Man nennt diese Bedingung eine **Stabilitätsbedingung**.

Verdoppelt man also die Zahl der Gitterpunkte im Ort, muß man entsprechend mit einem vierfach kleineren Zeitschritt arbeiten.

- 2) Das implizite Verfahren ist für alle Werte von k und h stabil.

Zur Berechnung der Lösung muß man allerdings in jedem Zeitschritt ein lineares Gleichungssystem lösen.

- 3) Bei Verfahren sind erster Ordnung in der Zeit und zweiter Ordnung im Ort, d.h. für den Fehler $e(T)$ zwischen der exakten und der numerischen Lösung zu einer festen Zeit $T > 0$ gilt:

$$e(T) = O(k) + O(h^2)$$

Bemerkungen: (Fortsetzung)

4) Die Stabilitätsbedingung für die θ -Methode für $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ lautet

$$\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}(1 - 2\theta)^{-1}$$

Für $\theta \geq \frac{1}{2}$ ist die θ -Methode stets stabil.

5) Das Verfahren von Crank–Nicholson ist zweiter Ordnung in Ort **und** Zeit, d.h. es gilt

$$e(T) = O(k^2) + O(h^2)$$

Für keinen anderen Wert von θ gilt ein entsprechendes Resultat.

Daher ist das Verfahren von Crank–Nicholson ein spezielles Verfahren für die Wärmeleitungsgleichung und wird häufig bei numerischen Berechnungen verwendet.

8.1 Die Methode der Finiten-Elemente

Wir beschränken uns auf das **eindimensionale Randwertproblem**:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) = f(x), & 0 < x < l, \quad k(x) > 0 \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases}$$

$k=1$
 $-u_{xx} = f$

FE-Methoden basieren auf drei grundlegenden Ideen:

- 1) Man reformuliert das gegebene Problem in einer **schwachen Form** oder auch **Variationsformulierung**. Dadurch reduziert sich das Problem auf unendlich viele algebraische Gleichungen in einem Vektorraum, dessen Elemente bereits die vorgegebenen Randwerte erfüllen.
- 2) Die **Galerkin Methode** reduziert das Problem auf Gleichungen in einem **endlich-dimensionalen** Finite-Element-Raum, der eine endliche Zahl von Basiselementen besitzt.

- 3) Als Basis des endlich-dimensionalen FE-Raums wählt man **stückweise Polynome** und erhält damit ein lineares Gleichungssystem mit einer **dünn besetzten** Koeffizientenmatrix.

Die schwache Form des Randwertproblems

Sei V gegeben durch

$$V = \{v \in C^2[0, l] : v(0) = v(l) = 0\}$$

Wir multiplizieren nun die gegebene Poissongleichung mit einer Funktion $v \in V$ und integrieren über den Ortsraum $[0, l]$:

$$-\int_0^l \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) v(x) dx = \int_0^l f(x) v(x) dx$$

Mittels partieller Integration erhalten wir

$$\int_0^l k(x) \frac{du}{dx} v(x) dx + \int_0^l k(x) \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) dx = \int_0^l f(x) v(x) dx$$

(Note: The first term in the above equation is crossed out with a red line in the original image. Below it, the boundary conditions $v(0) = v(l) = 0$ are written in red.)

Da $v \in V$ eine beliebige Funktion ist, lautet die schwache Form:

Finde ein $u \in V$, sodass die Beziehung

$$a(u, v) = \int_0^l k(x) \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) dx = \int_0^l f(x)v(x) dx = (f, v)$$

für alle $v \in V$ erfüllt ist.

hier 1. Ableitung

Man kann nun zeigen:

Erfüllt $u \in V$ die Differentialgleichung

$$-\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) = f(x),$$

so erfüllt u auch die schwache Form von oben, und **wichtiger**, es gilt ebenfalls die **Umkehrung**.

Fazit: Beide Darstellungen sind also äquivalent.

Die Galerkin-Methode

Definieren wir

$$a(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \lambda_1 a(u_1, v) + \lambda_2 a(u_2, v)$$

$$a(u, v) := \int_0^l k(x) \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) dx = a(v, u)$$

so ist $a(\cdot, \cdot)$ eine **symmetrische Bilinearform**, die ein inneres Produkt im Vektorraum V darstellt.

Mit Hilfe der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ und dem Skalarprodukt

$$(f, v) = \int_0^l f(x) v(x) dx$$

läßt sich die schwache Form folgendermaßen schreiben:

finde ein $u \in V$, sodass $a(u, v) = (f, v)$ für alle $v \in V$ gilt

⇒ Existenz + Lemma (Lax-Nikolski)

Die Idee der Galerkinmethode ist nun den Vektorraum V durch einen endlich-dimensionalen Raum V_n , den sogenannten **Finite-Element-Raum**, zu approximieren und dort folgendes Problem zu lösen:

finde ein $v_n \in V_n$, sodass $a(v_n, v) = (f, v)$ für alle $v \in V_n$ gilt

Dieses Problem läßt sich auf ein lineares Gleichungssystem reduzieren:

Sei $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$ eine Basis von V_n . Dann besitzt die Lösung v_n die Darstellung

erwartete Lsg $\rightarrow v_n = \sum_{j=1}^n u_j \Phi_j$ *gesucht*

Setzen wir dies in die schwache Form ein, so gilt:

$$\sum_{j=1}^n \underbrace{a(\Phi_j, \Phi_i)}_{\substack{e_{ij} \\ \text{gegeben}}} u_j = a\left(\sum_{j=1}^n u_j \Phi_j, \Phi_i\right) = \underbrace{(f, \Phi_i)}_{\text{gesucht}}, \quad i = 1, \dots, n$$

Aufgrund der Bilinearität von $a(\cdot, \cdot)$ folgt

$$\sum_{j=1}^n a(\Phi_j, \Phi_i) u_j = (f, \Phi_i), \quad i = 1, \dots, n$$

Setzen wir für $i = 1, \dots, n$

$$a_{ij} = a(\Phi_j, \Phi_i), \quad f_i = (f, \Phi_i),$$

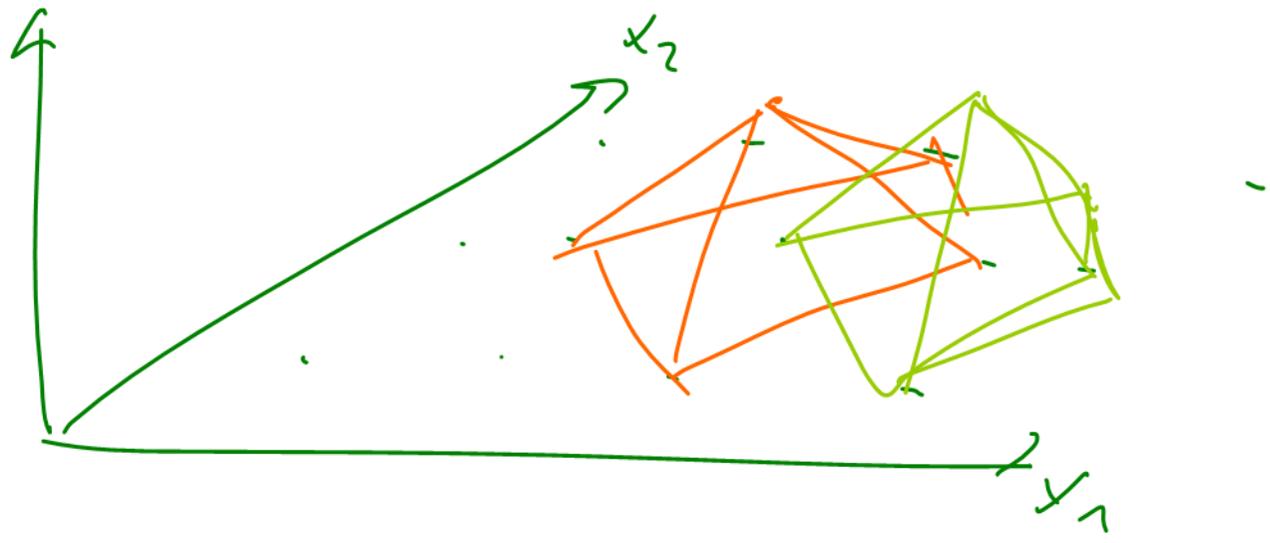
so ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

mit der **Steifigkeitsmatrix** \mathbf{A} und dem Lösungsvektor

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$$

mit den zu bestimmenden Koeffizienten u_1, \dots, u_n .



Approximation der stückweise Polynome

Zur Konstruktion von FE-Räumen machen wir folgende Vorüberlegungen:

- 1) Am besten wären FE-Räume V_n , für die man eine Orthogonalbasis aufstellen kann. Dann wäre die Steifigkeitsmatrix eine Diagonalmatrix. Dies ist aber im Allgemeinen nicht möglich.
- 2) Findet man keine Orthogonalbasis, so sollten Steifigkeitsmatrix und die rechte Seite **einfach** zu berechnen sein.
- 3) Die Basis von V_n sollte **fast** orthogonal sein, denn dann wäre die Steifigkeitsmatrix nahe bei einer Diagonalmatrix und damit **dünn besetzt**.
- 4) Die exakte Lösung u des Problems sollte **möglichst gut** durch ein Element aus V_n approximiert werden können und im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ sollte die Approximation **beliebig gut** werden.

Daher: Approximation durch stückweise Polynome, zum Beispiel durch eine stückweise **lineare** Funktion.