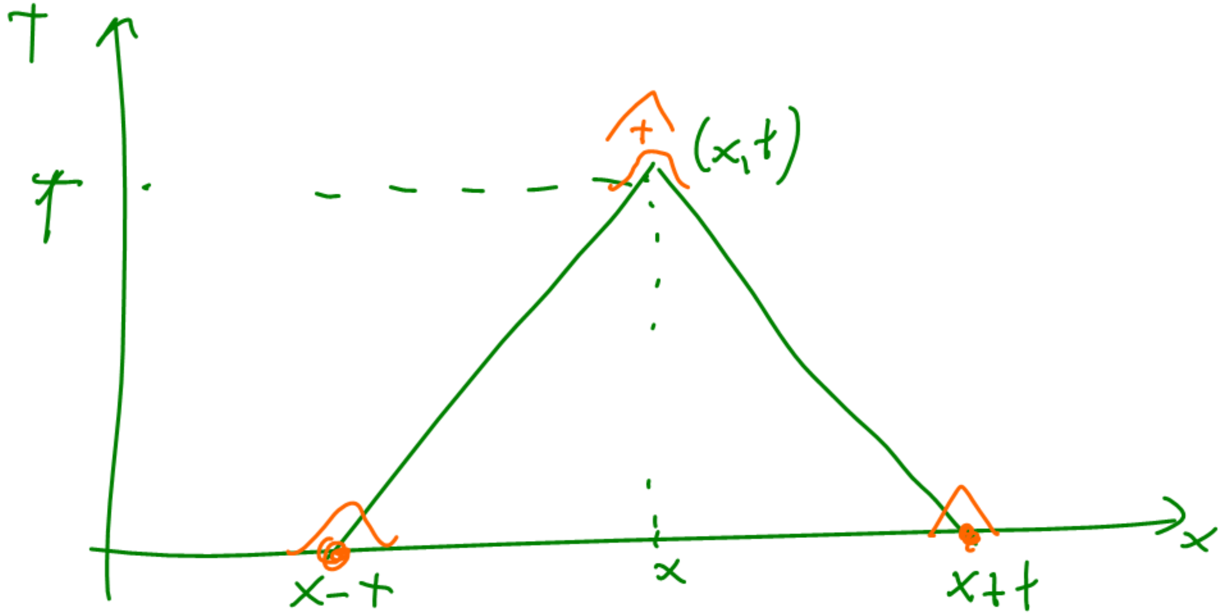
$u_{tt} = u_{xx}$ $\quad \mathbb{R} \times (0,\infty)$

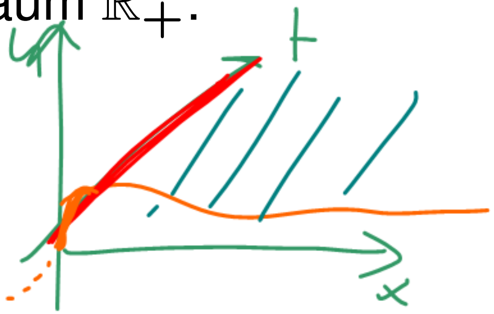
$u = g$ $\quad \mathbb{R} \times \{t=0\}$ $\qquad u(x,t) = \frac{1}{2}\big(g(x+t) + g(x-t)\big)$

$u_t = 0$ $\quad \mathbb{R} \times \{t=0\}$



Die Reflektionsmethode für den Halbraum $\mathbb{R}_+ = \{x > 0\}$:

Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem auf dem Halbraum $\mathbb{R}_+$:



$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty) \\ u = g,\ u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{auf } \{x = 0\} \times (0, \infty) \end{cases}$$

mit vorgegebenen Funktionen g und h mit $\boxed{g(0) = h(0) = 0.}$

Idee:

Erweitere das Halbraumproblem auf ein Ganzraumproblem und verwende die Formel von d' Alembert.

Definiere eine Funktion $\tilde{u}(x,t)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ durch

$$\tilde{u}(x,t) := \begin{cases} u(x,t) & (x \geq 0, t \geq 0) \\ -u(-x,t) & (x \leq 0, t \geq 0) \end{cases}$$

Analog werden die gegebenen Anfangsdaten **reflektiert**:

$$\tilde{g}(x) := \begin{cases} g(x) & (x \geq 0) \\ -g(-x) & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$\tilde{h}(x) := \begin{cases} h(x) & (x \geq 0) \\ -h(-x) & (x \leq 0) \end{cases}$$

Damit erhalten wir für die Funktion $\tilde{u}$ das **Anfangswertproblem**

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ \tilde{u} = \tilde{g},\ \tilde{u}_t = \tilde{h} & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

und nach der Lösungsformel nach d'Alembert gilt

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}(\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)dy$$

$$\tilde{u}(0,t) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\tilde{g}(t)}_{-\tilde{g}(-t)} + \tilde{g}(-t)\right) + \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-t}^{t} \tilde{h}(y)dy}_{=0} = 0$$

$$\tilde{u}(-x,t) = \frac{1}{2}(\tilde{g}(-x+t) + \tilde{g}(-x-t)) + \frac{1}{2}\int_{-x-t}^{-x+t} \tilde{h}(y)dy =$$

$$\underbrace{-g(x-t)} \quad \underbrace{-g(x+t)} \quad -\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy = -u(x,t) \qquad \text{Ungerade Fkt.}$$

Analog werden die gegebenen Anfangsdaten **reflektiert**:

$$\tilde{g}(x) \;:=\; \begin{cases} g(x) & (x \geq 0) \\ -g(-x) & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$\tilde{h}(x) \;:=\; \begin{cases} h(x) & (x \geq 0) \\ -h(-x) & (x \leq 0) \end{cases}$$

Damit erhalten wir für die Funktion $\tilde{u}$ das **Anfangswertproblem**

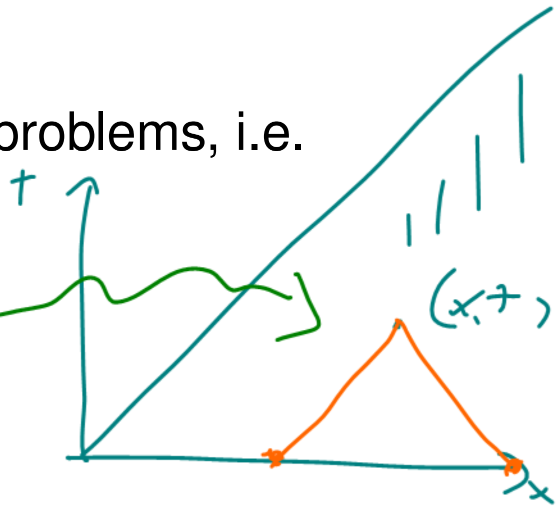
$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ \tilde{u} = \tilde{g},\ \tilde{u}_t = \tilde{h} & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

und nach der Lösungsformel nach d'Alembert gilt

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)\,dy$$

$$\tilde{u}(0,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{g}(t) + \underbrace{\tilde{g}(-t)}_{-\tilde{g}(t)}\right) + \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-t}^{t} \tilde{h}(y)\,dy}_{=0} = 0$$

Für $x \geq 0$ haben wir gerade die Lösung des Ausgangsproblems, i.e.



$$u(x,t) = \tilde{u}(x,t)$$

Fallunterscheidung:

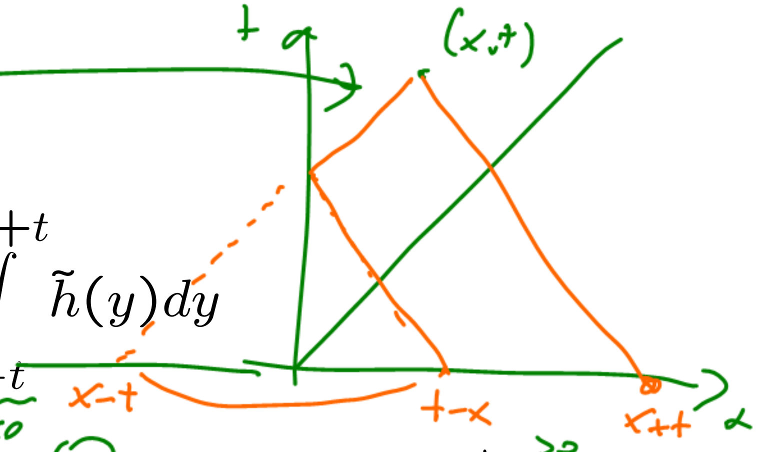
1) Ist $x \geq t \geq 0$, so folgt $x - t \geq 0$ und daher

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{g}(\underbrace{x+t}_{\geq 0}) + \tilde{g}(\underbrace{x-t}_{\geq 0})\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{\underbrace{x-t}_{\geq}}^{x+t} \tilde{h}(y)dy$$

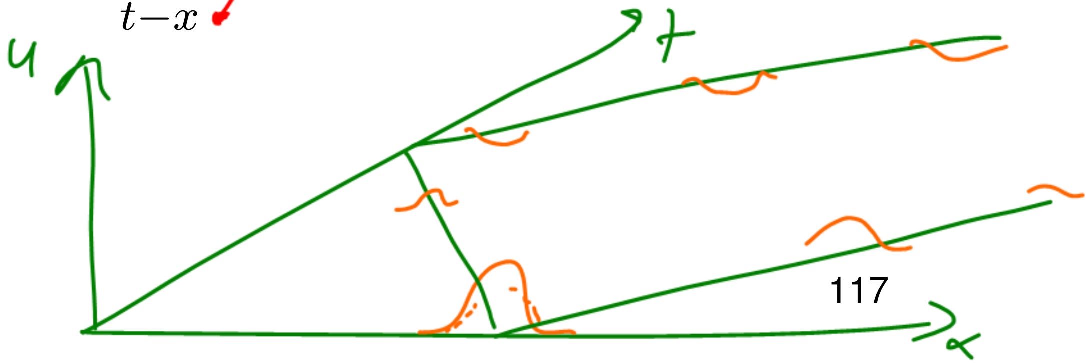
$$= \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} h(y)dy$$

denn für positive Argumente stimmen die Funktionen g und $\tilde{g}$ beziehungsweise h und $\tilde{h}$ überein. $x - t \geq 0$ Rand irrelevant

2) Ist $0 \leq x \leq t$, so folgt $x - t \leq 0$ und daher



$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}\left(\tilde{g}(\underbrace{x+t}_{>0}) + \tilde{g}(\underbrace{x-t}_{<0})\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{\underbrace{x-t}_{<0}}^{x+t} \tilde{h}(y)dy \\
&= \frac{1}{2}\left(g(x+t) - g(-(x-t))\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t<0}^{0} \tilde{h}(y)dy + \frac{1}{2}\int\limits_{\underbrace{0}_{>0}}^{x+t>0} \tilde{h}(y)dy \\
&= \frac{1}{2}\left(g(x+t) - g(t-x)\right) - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t-x>0} h(y)dy + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x+t} h(y)dy \\
&= \frac{1}{2}\left(g(x+t) - g(t-x)\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{x+t} h(y)dy
\end{aligned}
$$



Gesamtlösung:

Wir erhalten also als Lösung des Ausgangsproblems

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} h(y)dy & x \geq t \geq 0 \\ \frac{1}{2}\left(g(x+t) - g(t-x)\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{-x+t}^{x+t} h(y)dy & 0 \leq x \leq t \end{cases}$$

Beispiel:

Die Lösung des ARWP

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty) \\ u = 0,\ u_t = \sin x & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t=0\} \\ u = 0 & \text{auf } \{x=0\} \times (0,\infty) \end{cases}$$

lautet

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\cos(x-t) - \cos(x+t))$$

6.2 Lösungen der Wellengleichung durch sphärische Mittelung

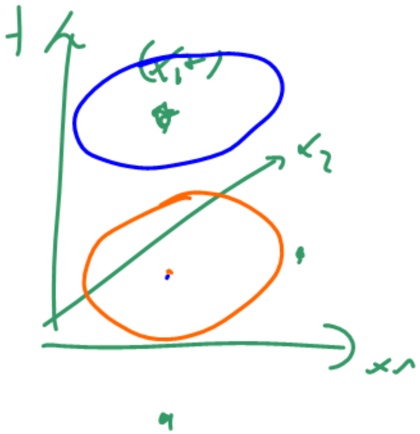
Wir betrachten nun den höherdimensionalen Fall $n \geq 2$ und suchen eine Lösung für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Idee:

Leite durch geeignete **sphärische Mittelungen** eine vereinfachte Differentialgleichung ab, die dann eine explizite Lösungsformel für die höherdimensionale Wellengleichung liefert.

Für $\overset{\text{fest}}{x} \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ und $r > 0$ definieren wir den **Mittelwert** von $u(x,t)$ über die Sphäre $\partial B(x,r)$,



$$U(x;r,t) := \fint_{\partial B(x,r)} u(y,t)dS(y) \xrightarrow{r \to 0} u(x,t)$$

Weiter sei

$$\begin{cases} G(x;r) := \fint_{\partial B(x,r)} g(y)dS(y) \xrightarrow{r\to 0} g(x) \\ H(x;r) := \fint_{\partial B(x,r)} h(y)dS(y) \xrightarrow{r\to 0} h(x) \end{cases}$$

Satz:

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ fest und u eine Lösung der obenstehenden Wellengleichung. Dann löst $U(x;r,t)$ die **Euler–Poisson–Darboux Gleichung**

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r} U_r = 0 & \text{in } \underset{r}{\mathbb{R}_+} \times \underset{t}{(0,\infty)} \\ U = G,\ U_t = H & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t=0\} \end{cases}$$

$U \neq g$ i.A. $r=0$

Beweis:

Einer früheren Beobachtung folgend (siehe Seite 71 des Skripts) gilt:

$$U_r(x;r,t) = \frac{r}{n} \fint_{B(x,r)} \Delta u(y,t)\, dy$$

$= \ldots$

Beweis: (Fortsetzung)

Da u eine Lösung der Wellengleichung ist, folgt

$$U_r(x;r,t) = \frac{r}{n} \fint_{B(x,r)} u_{tt}(y,t)\,dy$$

und damit

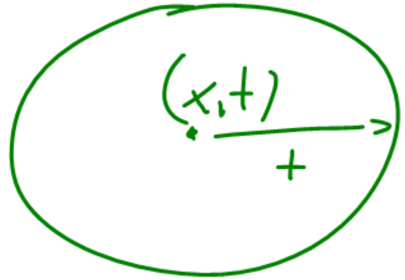
$$r^{n-1} U_r = \frac{1}{n\alpha(n)} \int\limits_{B(x,r)} u_{tt}\,dy$$

Daraus folgt aber

$$(r^{n-1}U_r)_r = \frac{1}{n\alpha(n)} \int\limits_{\partial B(x,r)} u_{tt} dS = r^{n-1} \fint_{\partial B(x,r)} u_{tt} dS = r^{n-1} U_{tt}$$

Fassen wir dieses Ergebnis zusammen, so löst U in der Tat die Gleichung

$$U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r} U_r = 0$$



Die Kirchhoffsche Formel für $n = 3$:

Die Lösung des Anfangswertproblems für die Wellengleichung lautet:

$$u(x,t) = \fint_{\partial B(x,t)} \left(th(y) + g(y) + Dg(y) \cdot (y-x)\right) dS(y) \quad (x \in \mathbb{R}^3, t > 0)$$

Herleitung über die Euler–Poisson–Darboux Gleichung:

Wir definieren

$$\begin{aligned} \tilde{U} &:= rU \\ \tilde{G} &:= rG, \quad \tilde{H} := rH \end{aligned}$$

Dann gilt

$= 3-1$ $(n-1)$

$$\tilde{U}_{tt} = rU_{tt} = r\left(U_{rr} + \frac{2}{r}U_r\right) = rU_{rr} + 2U_r = (U + rU_r)_r = \tilde{U}_{rr}$$

$= (rU)_{rr}$

$\tilde{U}(r=0) = r\,U(r=0) = 0$

Also löst $\tilde{U}$ das Anfangswertproblem

Halbraum

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty) \\ \tilde{U} = \tilde{G},\ \tilde{U}_t = \tilde{H} & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t=0\} \\ \boxed{\tilde{U} = 0} & \text{auf } \{r=0\} \times \{t=0\} \end{cases}$$

Mit der Lösungsformel für das Halbraumproblem folgt für $\boxed{0 \le r \le t}$ die Darstellung

$$\tilde{U}(x;r,t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)\right] + \frac{1}{2}\int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y)dy$$

Da $U(x;r,t)$ aus $u(x,t)$ durch spärische Mittelung entsteht, gilt

$$u(x,t) = \lim_{r\to 0} U(x;r,t) = \lim_{r\to 0} \frac{\tilde{U}(x;r,t)}{r}$$

Mit der Definition von $\tilde{U}$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \lim_{r\to 0} \frac{\tilde{U}(x;r,t)}{r} \\
&= \lim_{r\to 0} \left(\frac{\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)}{2r} + \frac{1}{2r} \int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y)dy \right) \\
&= \tilde{G}'(t) + \tilde{H}(t)
\end{aligned}
$$

$= (tG(x;t))' + tH(t)$

Verwendet man die Definitionen von G und H, so erhält man

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}(tG(x;t)) + tH(x;t) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(t \fint_{\partial B(x,t)} g dS \right) + t \fint_{\partial B(x,t)} h dS
\end{aligned}
$$

Nun gilt

$$\fint_{\partial B(x,t)} g(y)dS(y) = \fint_{\partial B(0,1)} g(x+tz)dS(z)$$

und damit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\fint_{\partial B(x,t)} gdS\right) &= \fint_{\partial B(0,1)} Dg(x+tz)\cdot zdS(z) \\
&= \fint_{\partial B(x,t)} Dg(y)\cdot\left(\frac{y-x}{t}\right)dS(y)
\end{aligned}$$

Setzen wir dies in dies in die letzte Gleichung auf der vorgehenden Seite ein, so erhalten

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \fint_{\partial B(x,t)} tDg(y)\cdot\left(\frac{y-x}{t}\right)dS(y) + \fint_{\partial B(x,t)} g(y)dS(y) \\
&\quad + \fint_{\partial B(x,t)} thdS(y)
\end{aligned}$$

und dies ist gerade – nach Umsortierung – die **Kirchhoffsche Formel**.

Die Poissonsche Formel für $n = 2$:

Die Lösung des Anfangswertproblems für die Wellengleichung lautet:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \fint_{B(x,t)} \frac{tg(y) + t^2 h(y) + tDg(y) \cdot (y - x)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}} dy$$

für $x \in \mathbb{R}^2$ und $t > 0$.

Um diese Lösungsdarstellung abzuleiten, betrachtet man das dreidimensionale Anfangswertproblem und nimmt zusätzlich an, dass die Lösung nicht von der dritten Ortskoordinate x_3 abhängt.

Bemerkung:

Nach einem zur Herleitung der Kirchhoffschen Formel analogen Prinzip, i.e. Verwendung der EPD Gleichung und geeignete Definition von $\tilde{U}$, lassen sich Lösungsformeln für das Anfangswertproblem der Wellengleichung im $\mathbb{R}^n$ ableiten.

8.1 Die Methode der Finiten–Differenzen

Wir beschränken uns auf **eindimensionale** Probleme und die folgenden Anfangs– und Anfangsrandwertprobleme

1) Cauchy–Probleme für **skalare Erhaltungsgleichungen**, also

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

2) Randwertprobleme für die **Poissongleichung**, also

$$\begin{cases} -u_{xx} = f(x) & : \ 0 < x < 1,\ 0 < t \leq T \\ u(0) = u(1) = 0 & \end{cases}$$

3) Anfangsrandwertprobleme für die **Wärmeleitungsgleichung**, also

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x,t) & : \ 0 < x < 1,\ 0 < t \leq T \\ u(x,0) = g(x) & : \ 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & : \ 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

4) $u_{tt} = u_{xx}$ $\quad$ $u_t = V$ $\quad$ $u_x = W$

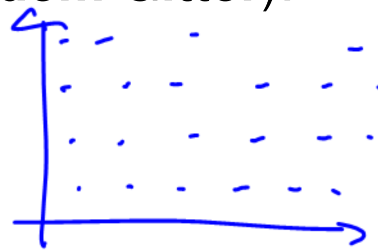
$V_t = W_x$

$V_x = W_t$

$$\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}_x$$

Idee bei Finiten–Differenzen:

Approximiere die exakte Lösung **nur** an diskreten Punkten (**dem Gitter**):



$$u(x_i, t_j) \approx U(x_i, t_j) =: U_i^j$$

mit den diskreten Punkten

$$x_i := i \cdot h, \quad i \in \mathcal{Z}_x, \qquad t_j := j \cdot k, \quad j \in \mathcal{Z}_t$$

und den **Orts– und Zeitschrittweiten** h und k. Die Indexmengen $\mathcal{Z}_x$ und $\mathcal{Z}_t$ sind dabei endliche oder unendliche Teilmengen von $\mathcal{Z}$.

Beispiel: Für die Wärmeleitungsgleichung auf $[0, 1] \times [0, T]$ setzen wir

$$\begin{aligned} x_i &:= i \cdot h, \quad i = 0, \ldots, n \\ t_j &:= j \cdot k, \quad j = 0, \ldots, m \end{aligned}$$

mit den Orts– und Zeitschrittweiten

$$h := \frac{1}{n}, \qquad k := \frac{T}{m}$$

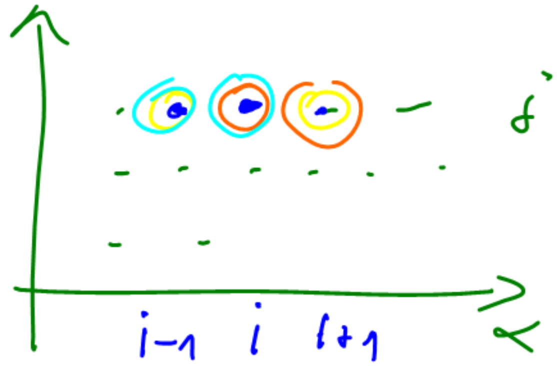
Zur Berechnung der diskreten Werte U_i^j benötigen wir die Approximation von Ableitungen:

Beispiel:

Wir approximieren die Ableitung $u_x(x,t)$ an der Stelle $(x,t) = (x_i, t_j)$:

1) **Zentrale Differenzen**

$$u_x(x_i, t_j) \approx \frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2h}$$



2) **Vorwärtsdifferenz**

$$u_x(x_i, t_j) \approx \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{h}$$

3) **Rückwärtsdifferenz**

$$u_x(x_i, t_j) \approx \frac{U_i^j - U_{i-1}^j}{h}$$

Approximationsgüte von Finiten–Differenzen

Sei $u(x,t)$ eine hinreichend oft differenzierbare Funktion und (x_i, t_j) ein fester Punkt eines Gitters mit Orts– und Zeitschrittweite h und k.

Mittels einer Taylorentwicklung um (x_i, t_j) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
u(x_{i+1}, t_j) &= u(x_i, t_j) + u_x(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{=h} + \\
&\quad \frac{1}{2} u_{xx}(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i+1} - x_i)^2}_{=h^2} + \frac{1}{6} u_{xxx}(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i+1} - x_i)^3}_{=h^3} + \ldots \\
u(x_{i-1}, t_j) &= u(x_i, t_j) + u_x(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i-1} - x_i)}_{=-h} + \\
&\quad \frac{1}{2} u_{xx}(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i-1} - x_i)^2}_{=h^2} + \frac{1}{6} u_{xxx}(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i-1} - x_i)^3}_{=-h^3} + \ldots
\end{aligned}
$$

Wir erhalten damit

1) bei **Zentralen Differenzen**

$$\left| u_x(x_i, t_j) - \frac{u(x_{i+1}, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{2h} \right| = O(h^2)$$

$\Rightarrow$ Approximation **zweiter** Ordnung in h.

2) bei **Vorwärtsdifferenzen**

$$\left| u_x(x_i, t_j) - \frac{u(x_{i+1}, t_j) - u(x_i, t_j)}{h} \right| = O(h)$$

$\Rightarrow$ Approximation **erster** Ordnung in h.

3) bei **Rückwärtsdifferenzen**

$$\left| u_x(x_i, t_j) - \frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{h} \right| = O(h)$$

$\Rightarrow$ Approximation **erster** Ordnung in h.

Finite–Differenzen für skalare Erhaltungsgleichungen

Wir betrachten das Cauchy–Problem

$$\frac{U_i^{j+1}-U_i^{j}}{k} \qquad \frac{f(U_{i+1}^{j})-f(U_{i-1}^{j})}{2h}$$

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R}\times\{t=0\} \end{cases}$$

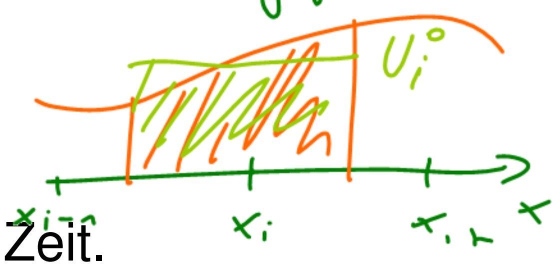
Mit den Notationen von oben ist ein numerisches Verfahren mit Hilfe von Finiten–Differenzen gegeben durch

$$\boxed{U_i^{j+1} = U_i^{j} - \frac{k}{2h}\Big(f(U_{i+1}^{j}) - f(U_{i-1}^{j})\Big)}$$

mit den Anfangsbedingungen

U_i^0 sind [illegible] gegeben

$$U_i^0 = \frac{1}{h}\int_{x_i-h/2}^{x_i+h/2} u_0(x)\,dx$$

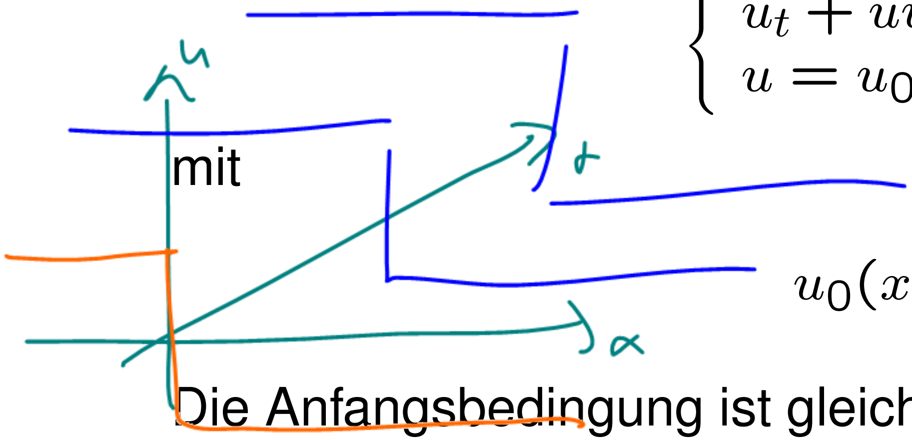


Also: Zentrale Differenz im Ort, Vorwärtsdifferenz in der Zeit.

$uu_x = \left(\frac{u^2}{2}\right)_x \qquad f(u) = \frac{u^2}{2}$

Beispiel: Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$



Sprungbed. $s' = \frac{f(u_r) - f(u_l)}{u_r - u_l} = \frac{\frac{1^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2}}{1 - (-1)} = 0$

mit

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : \ x \le 0 \\ -1 & : \ x > 0 \end{cases}$$

Die Anfangsbedingung ist gleichzeitig die Lösung für $t > 0$!

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{k}{2h}\left(\frac{(U_{i+1}^j)^2}{2} - \frac{(U_{i-1}^j)^2}{2}\right)$$

$$U_i^0 = \begin{cases} 1 & : \ i < 0 \\ 0 & : \ i = 0 \\ -1 & : \ i > 0 \end{cases}$$

Fazit: Funktioniert nicht, Verfahren ist **instabil**

Beispiel: Wir betrachten die lineare Advektionsgleichung

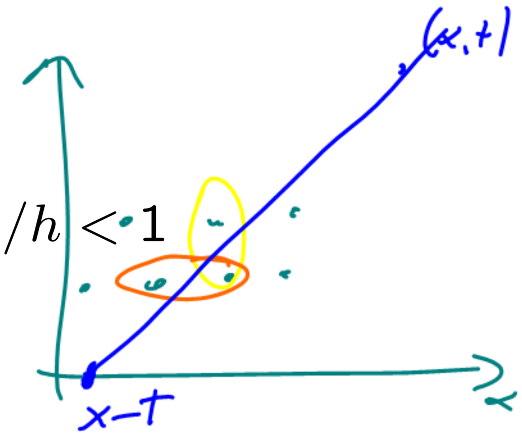
$$\begin{cases} u_t + u_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

$u(x,t) = u_0(x - t)$

CLAW PACK

Zentrale Differenzen im Ort:

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{k}{2h}\left(U_{i+1}^j - U_{i-1}^j\right)$$



Funktioniert selbst bei einer linearen Gleichung nicht!

Upwind–Verfahren: funktioniert unter der CFL–Bedingung $k/h < 1$

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{k}{h}\left(U_i^j - U_{i-1}^j\right)$$

Lax–Friedrichs–Verfahren: funktioniert wie das Upwind–Verfahren

$$U_i^{j+1} = \frac{U_{i+1}^j + U_{i-1}^j}{2} - \frac{k}{2h}\left(U_{i+1}^j - U_{i-1}^j\right)$$

$$u_t \sim \frac{U_i^{j+1} - \frac{u_{i+1}^j + u_{i-1}^j}{2}}{k}$$