Satz: (Dirichlet–Problem für die Laplacegleichung)

Die Lösung des Randwertproblems

$f = 0$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n_+ \\ u = g & \text{auf } \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \,:\, x_n = 0\} \end{cases}$$

ist gegeben durch die Poissonsche Integralformel

$$\boxed{u(\mathbf{x}) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n} d\mathbf{y}}$$

Insbesondere ist die Lösung $u(\mathbf{x})$ wegen

$$\int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(\mathbf{x},\mathbf{y}) dy = 1$$

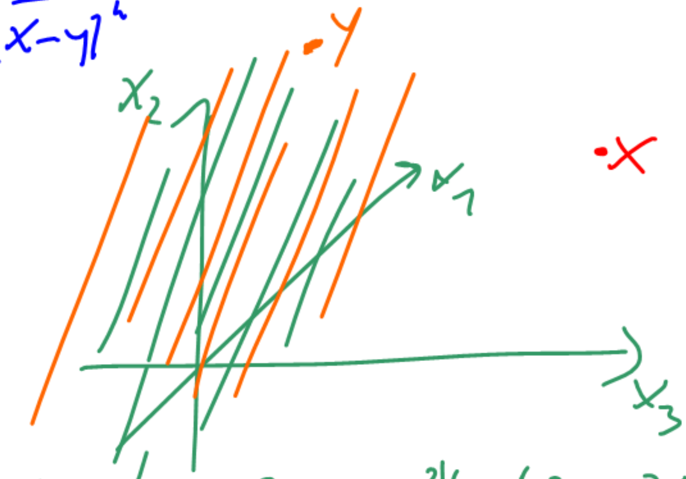
beschränkt, falls g beschränkt ist, Man kann weiter zeigen, dass die Lösung sogar **unendlich oft differenzierbar** ist.

falls $f \equiv 0$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(y) \left(\Phi(x-y) - \Phi(\tilde{x}-y) \right) dx$$

2.2. $\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)\,dy = 1$ $\qquad K(x,y) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)}\,\frac{1}{|x-y|^n}$

$n=3$



$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$|y-x|^2 = \left((y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + x_3^2\right) = \left(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi + x_3^2\right) = \left(r^2 + x_3^2\right)$$

$y_1 - x_1 = r\cos\varphi$ $\qquad dy_1\,dy_2 \hat{=} r\,dr\,d\varphi$

$y_2 - x_2 = r\sin\varphi$

$$\int_{\partial\mathbb{R}^3_+} K(x,y)\,dy = \frac{2x_3}{\cancel{3}\cdot\frac{4}{\cancel{3}}\pi}\iint_{\mathbb{R}\,\mathbb{R}} \frac{dy_1\,dy_2}{|y-x|^3} = \frac{x_3}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} \frac{r\,dr\,d\varphi}{|r^2+x_3^2|^{3/2}} = \frac{x_3\,\cancel{2\pi}}{\cancel{2\pi}\cdot 2}\int_0^\infty \frac{2r\,dr}{|r^2+x_3^2|^{3/2}}$$

$$\underset{r^2=z}{=} \frac{x_3}{2}\int_0^\infty \frac{dz}{(z+x_3^2)^{3/2}} = \frac{x_3}{2}\cdot\left[\frac{1}{(z+x_3^2)^{1/2}}\cdot\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)}\right]_0^\infty = \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2}} = 1$$

2.B $\quad g = 1 \qquad \Delta u = 0$, $u = 1$ auf $\partial\mathbb{R}^3_+ \qquad u(x) = \int K(x,y)\cdot 1\,dy = 1$

nicht eindeutig

Vorsicht $\quad u(x) = 1 + a x_3 \qquad u(x_1,x_2,0) = 1$ ✓ $\qquad \Delta u = 0$

5.2 Die Fundamentallösung

Definition:

Die Funktion

$$\Phi(\mathbf{x},t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4t}} & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0) \\ 0 & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t < 0) \end{cases}$$

heißt Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung.

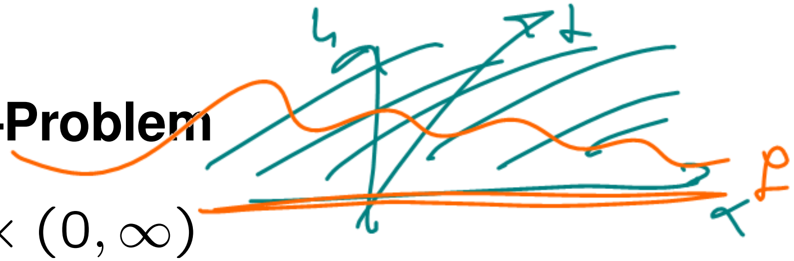
Insbesondere ist die Fundamentallösung **normiert**, d.h. für alle $t > 0$ gilt:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)dx = 1$$

Bemerkung:

Die Fundamentallösung besitzt für $t = 0$ und $\mathbf{x} = 0$ eine Singularität.

Mit Hilfe von $\Phi(x,t)$ lässt sich für das **Cauchy–Problem**



$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$$

eine Lösungsdarstellung wieder in der Form eines Faltungsintegral angeben:

i) Lsg. ✓ $u_t - \Delta u = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\Phi(x-y,t)_t - \Delta_x \Phi(x-y,t)\right)}_{=0} g(y)\,dy = 0$

$$u(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

$$= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4t}} g(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

ii) AB erfüllt? $\lim_{t\to 0} u(x,t) \overset{?}{=} g(x)$

Herleitung der Fundamentallösung (nur für $x \in \mathbb{R}$):

Ist $u(x,t)$ eine Lösung von $u_t = \Delta u$, so ist $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung.

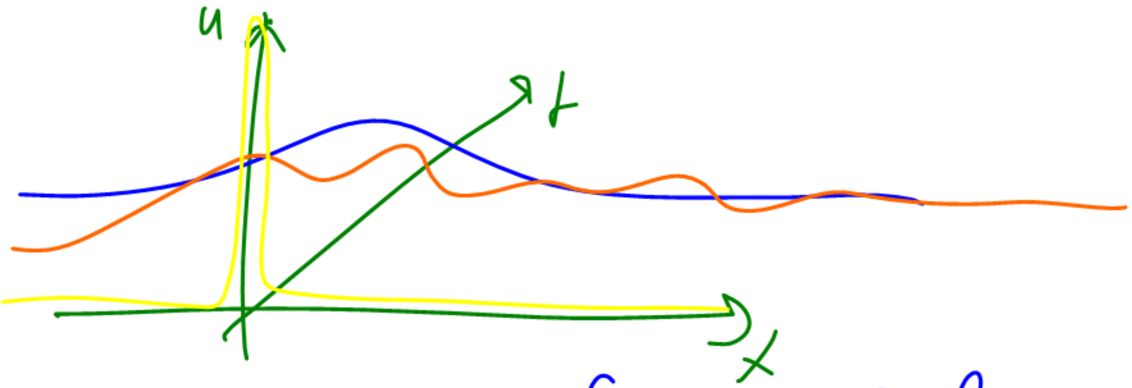
$\tilde{u}(x,t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$

$\tilde{u}_t - \Delta \tilde{u} = \lambda^2 u_t - \lambda^2 \Delta u = \lambda^2 \underbrace{(u_t - \Delta u)}_{=0} = 0$

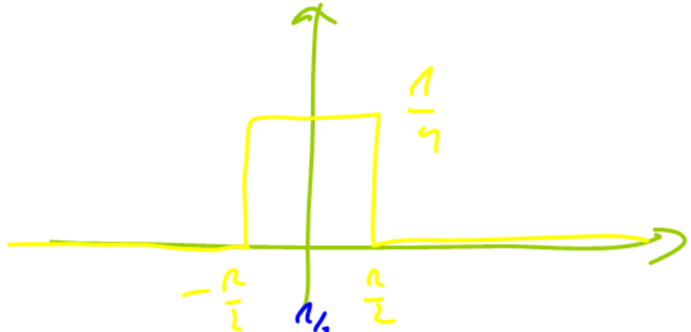
~~Koo~~ neue Koordinaten $\tilde{x} = \lambda x$, $\tilde{t} = \lambda^2 t$

$\frac{\tilde{x}^2}{\tilde{t}} = \frac{\lambda^2 x^2}{\lambda^2 t} = \frac{x^2}{t}$

$\Rightarrow r = \frac{x}{\sqrt{t}}$



$$\phi \to \psi(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ sonst} \\ \frac{1}{\ell} & x \in \left[-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right] \end{cases}$$



$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\,dx = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{1}{\ell}\,dx = 1$$

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x-y)\, g(y)\,dy = \frac{1}{\ell} \int_{x-\frac{\ell}{2}}^{x+\frac{\ell}{2}} g(y)\,dy \xrightarrow[\ell \to 0]{} g(x) \quad \left(\text{falls } g \text{ stetig}\right)$$

Ansatz:

Wir suchen daher eine spezielle Lösung in der Form

$$u(x,t) = \frac{1}{t^{1/2}} v \Bigg(\underbrace{\frac{x}{t^{1/2}}}_{r} \Bigg)$$

Man berechnet nun

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= -\frac{1}{2} t^{-3/2} \cdot v - \frac{x}{2} \cdot t^{-3/2} \cdot t^{-1/2} v' \\ u_x(x,t) &= t^{-1/2} \cdot t^{-1/2} \cdot v' \\ u_{xx}(x,t) &= t^{-3/2} \cdot v'' \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$u_t - u_{xx} = -\frac{1}{2} \cdot t^{-3/2} \cdot v - \frac{x}{2} \cdot t^{-2} \cdot v' - t^{-3/2} \cdot v'' = 0$$

$$x \cdot t^{-2} = \frac{x}{\sqrt{t}} \cdot t^{-3/2} = r\, t^{-3/2}$$

Wir erhalten also mit $r = x/\sqrt{t}$ die Gleichung zweiter Ordnung

$$\underbrace{\frac{1}{2}v + \frac{r}{2}v'}_{\frac{1}{2}(rv)'} + v'' = 0$$

Umschreiben ergibt

$$(v')' + \frac{1}{2}(rv)' = 0 \quad \Rightarrow \quad v' + \frac{1}{2}rv = c \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow c = 0$

Nehmen wir nun folgende Grenzbeziehungen an

$$\lim_{r\to\infty} v(r) = \lim_{r\to\infty} v'(r) = 0$$

so folgt $c = 0$ und die Gleichung lautet

$(\ln v)' = \frac{v'}{v} = -\frac{1}{2}r$

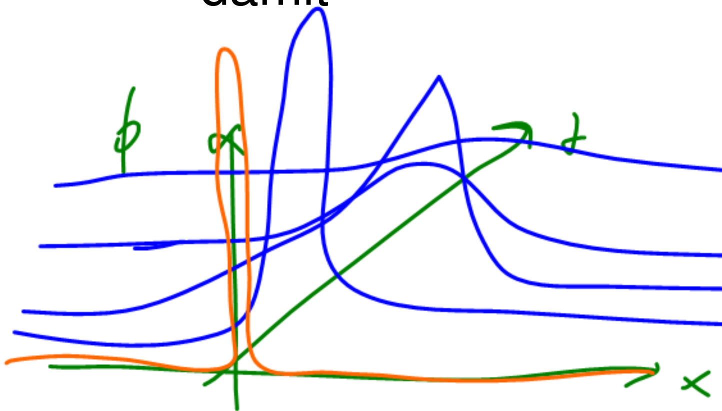
$$v' = -\frac{1}{2}rv \quad \Rightarrow \quad v(r) = be^{-r^2/4}$$

$\int_{\mathbb{R}} v(r)\,dr \overset{!}{=} 1 \Rightarrow b$

Eine explizite Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung ist damit

$$\boxed{\Phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}}$$

normierte Fkt.



Weitere **Lösungsdarstellungen** mit Hilfe der Fundamentallösung:

1) Das inhomogene Anfangswertproblem mit homogenen Anfangsbedingungen

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

besitzt die Lösung

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x},t) &= \int_0^t \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t-s) f(\mathbf{y},s) d\mathbf{y}}_{u(x,t;s)} ds \\ &= \int_0^t \underbrace{\frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4(t-s)}} f(\mathbf{y},s) d\mathbf{y}}_{u(x,t;s)} ds \end{aligned}$$

1) **Duhamel'sches Prinzip:**

Die Funktion $u(\mathbf{x},t;s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t-s)f(\mathbf{y},s)d\mathbf{y}$ löst das Problem

$$\begin{cases} u_t(\cdot\,;s) - \Delta u(\cdot\,;s) &= 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (s,\infty) \\ u(\cdot\,;s) &= f(\cdot\,;s) & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=s\} \end{cases}$$

Man erhält dann die Lösung der inhomogenen Gleichung durch Integration über s:

i) $u(x,0) = 0$

ii) $u_t - \Delta u = \int_0^t \underbrace{(u_t - \Delta_x u)}_{=0}\,ds + \underbrace{u(x,t;t)}_{f(x,t)}$

$$u(\mathbf{x},t) = \int_0^t u(\mathbf{x},t;s)\,ds$$

$= f(x,t,$

2) Das inhomogene Anfangswertproblem mit allgemeinen Anfangsbedingungen $u(\mathbf{x},0) = g(\mathbf{x})$ besitzt die Lösung

$$u(\mathbf{x},t) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)g(\mathbf{y})d\mathbf{y}}_{} + \underbrace{\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t-s)f(\mathbf{y},s)d\mathbf{y}ds}_{}$$

$u_t - \Delta u = f$

$u = g \quad t = 0$

$u_{1t} - \Delta u_1 = 0$

$u_1 = g$

$u_{2t} - \Delta u_2 = f$

$u = 0$

$u = u_1 + u_2$

weil linear

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 \\ u = g \qquad t = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \\ u &= g \qquad t = s \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{Trafo} \\ &\tilde{t} = t - s \qquad \partial_{\tilde{t}} = \partial_t \end{aligned} \qquad u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y, t-s)\, g(y)\, dy$$

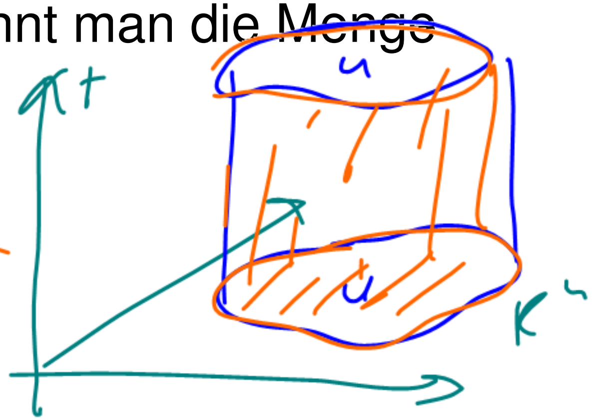
$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 \\ u(x,s) &= f(x,s) \end{aligned} \qquad u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y, t-s)\, f(y,s)\, dy$$

$$\boxed{\begin{aligned} u_t(x,t;s) - \Delta_x u(x,t;s) &= 0 \\ u(x,s;s) &= f(x,s) \end{aligned} \qquad u(x,t;s) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y, t-s)\, f(y,s)\, dy}$$

5.3 Eigenschaften von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

Analog zur Laplacegleichung erfüllen auch Lösungen der Wärmeleitungsgleichung **Mittelwertformeln**, die allerdings weniger anschaulich sind:

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $T > 0$ fest. Dann nennt man die Menge



$$U_T := U \times (0, T]$$

den **parabolischen Zylinder** und

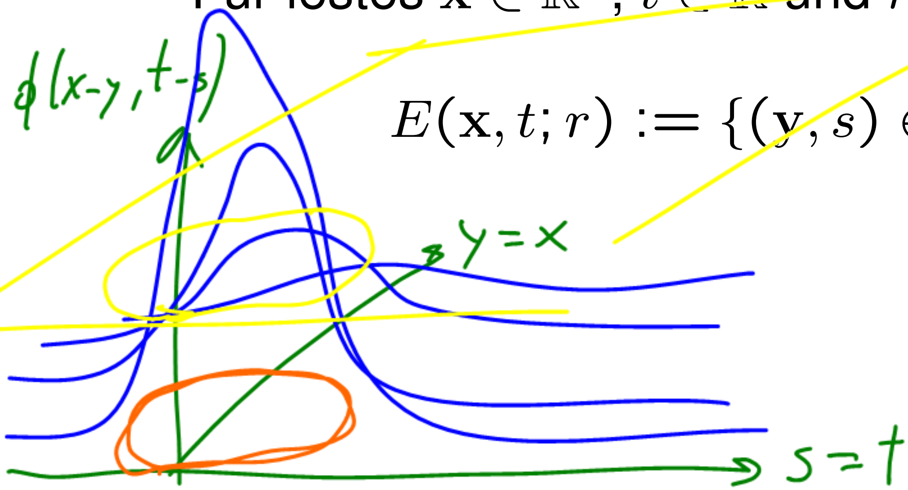
Bottom + Ränder

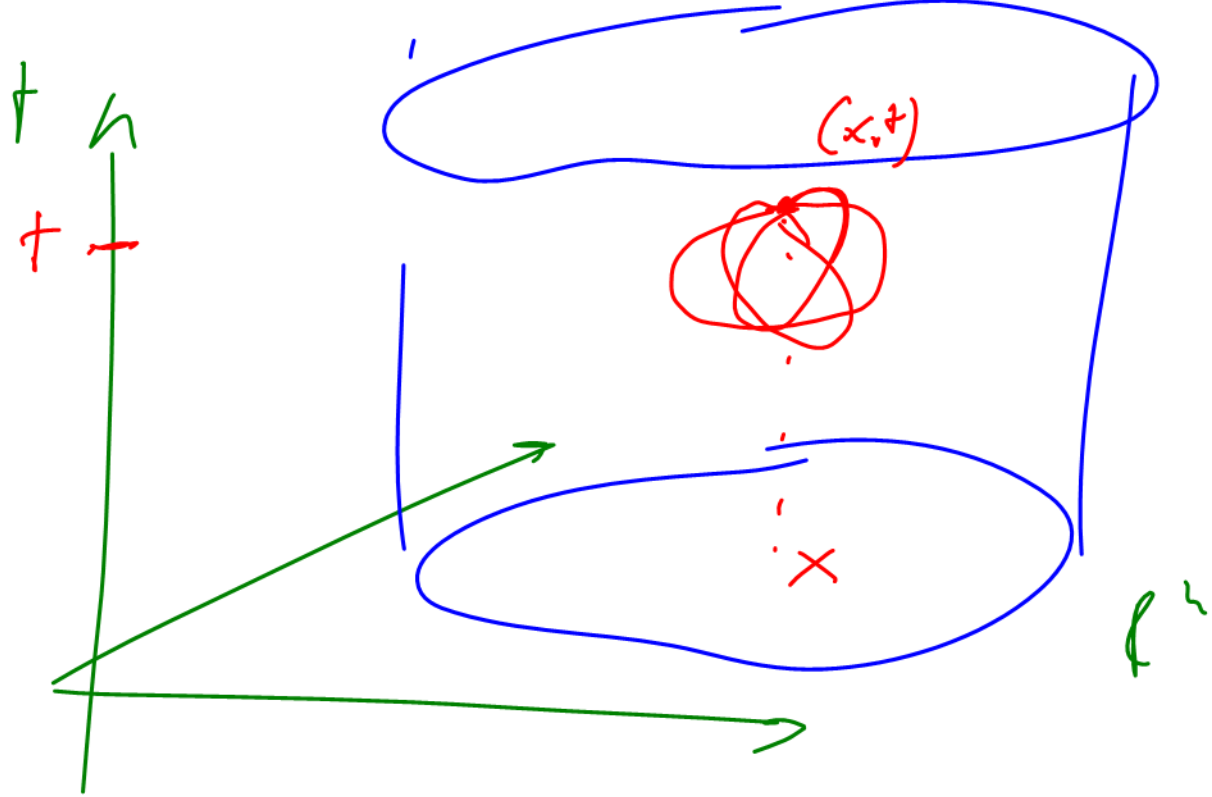
$$\Gamma_T := \overline{U_T} \setminus U_T$$

den **parabolischen Rand**.

Für festes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ sei die Menge $E(\mathbf{x}, t; r)$ gegeben durch

$$E(\mathbf{x}, t; r) := \{(\mathbf{y}, s) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ s \leq t, \ \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \geq \frac{1}{r^n}\}$$




t
t
(x,t)
x

Bemerkung:

1) Der Rand von $E(\mathbf{x}, t; r)$ ist gerade eine Höhenlinie der Fundamentallösung $\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s)$.

2) Man nennt die Menge $E(\mathbf{x}, t; r)$ auch **Wärmekugel** (heat ball).

Mit Hilfe von $E(\mathbf{x}, t; r)$ erhält man folgende **Mittelwerteigenschaft**:

Satz:

in x

Ist $u \in C^2_1(U_T)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, so gilt

in t

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4r^n} \int\limits_{E(\mathbf{x},t;r)} \underbrace{\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{(t - s)^2}}_{\text{gewichtete Mittelung}} u(\mathbf{y}, s)\, d\mathbf{y} ds$$

für jede Menge $E(x, t; r) \subset U_T$.

Aus der Mittelwerteigenschaft kann man folgende Maximumprinzipien herleiten.

Satz:

Sei $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U}_T)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung in U_T. Dann gilt

1) Das Maximum von $u(\mathbf{x}, t)$ liegt stets auf dem parabolischen Rand, d.h.

$$\max_{(\mathbf{x},t) \in \overline{U}_T} u(\mathbf{x}, t) = \max_{(\mathbf{x},t) \in \Gamma_T} u(\mathbf{x}, t)$$

2) Ist U zusammenhängend und existiert ein Punkt $(\mathbf{x}_0, t_0) \in U_T$ mit

$$u(\mathbf{x}_0, t_0) = \max_{(\mathbf{x},t) \in \overline{U}_T} u(\mathbf{x}, t)$$

so folgt, dass u auf $\overline{U}_{t_0}$ konstant ist.