4.2 Eigenschaften harmonischer Funktionen

Die **Mittelwerteigenschaft:**

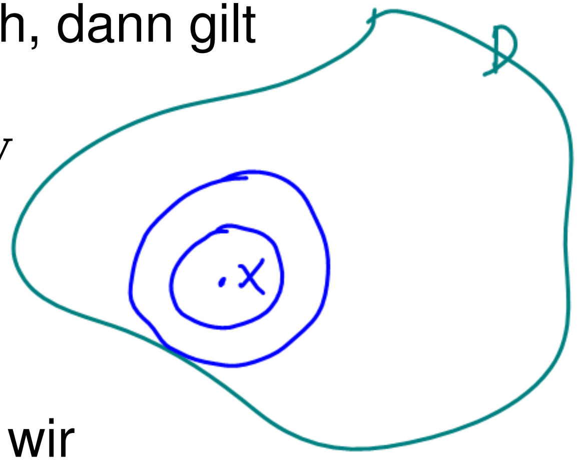
Eine besondere Eigenschaft harmonischer Funktionen ist, dass der Funktionswert an einer Stelle $\mathbf{x}$ stets gleich dem Mittelwert von u über eine Kugel mit Mittelpunkt $\mathbf{x}$ bzw. der zugehörigen Sphäre um $\mathbf{x}$ ist.

Satz:

$\Delta u = 0$

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Ist $u \in C^2(U)$ harmonisch, dann gilt

$$u(\mathbf{x}) = \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} u \, dS = \fint_{B(\mathbf{x},r)} u \, d\mathbf{y}$$



für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$.

Notation:

Bei Mittelungen über die Kugel oder die Sphäre schreiben wir

$$\fint \ldots = \frac{1}{\text{vol}(B(\mathbf{x}, r))} \int \ldots$$

Beweis:

Wir definieren für festes $\mathbf{x} \in U$ die Funktion $\phi(r)$ durch

$$\boxed{\phi(r) := \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} u(\mathbf{y})\, dS(\mathbf{y})} = \fint_{\partial B(0,1)} u(\mathbf{x} + r\mathbf{z})\, dS(\mathbf{z})$$

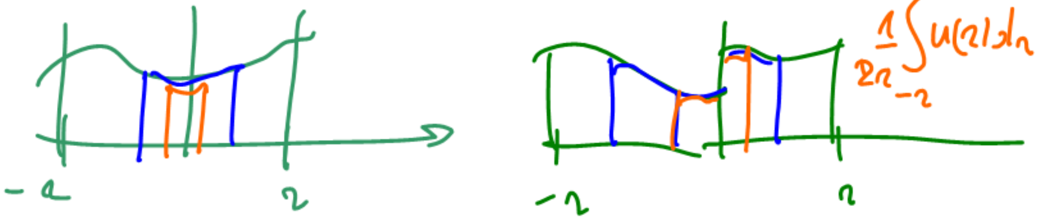
Dann gilt

$$\phi'(r) = \fint_{\partial B(0,1)} Du(\mathbf{x} + r\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z}\, dS(\mathbf{z})$$

und mit Hilfe der Greenschen Formeln erhalten wir

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} Du(\mathbf{y}) \cdot \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{r}\, dS(\mathbf{y}) \\ &= \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, dS(\mathbf{y}) \\ &= \frac{r}{n} \fint_{B(\mathbf{x},r)} \Delta u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = 0 \end{aligned}$$

$n=1$



$\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} u(r)\,dr \xrightarrow{r\to ?} ?$

Damit ist ϕ konstant und es gilt

$$\boxed{\phi(r) = \lim_{t\to 0}\phi(t)} = \lim_{t\to 0} \fint_{\partial B(\mathbf{x},t)} u(\mathbf{y})\,dS(\mathbf{y}) = \boxed{u(\mathbf{x})}$$

Unter Verwendung von Polarkoordinaten erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}\int\limits_{B(\mathbf{x},r)} u\,d\mathbf{y} &= \int\limits_0^r \left(\int\limits_{\partial B(\mathbf{x},s)} u dS \right) ds \\ &= u(\mathbf{x}) \int\limits_0^r n\alpha(n) s^{n-1} ds = \alpha(n) r^n u(\mathbf{x})\end{aligned}$$

Damit ergibt sich gerade die Mittelwertformel

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\alpha(n) r^n} \int\limits_{B(\mathbf{x},r)} u\,d\mathbf{y}$$

Es gilt auch folgende Umkehrung

Satz:

Für die Funktion $u \in C^2(U)$ gelte

$$u(\mathbf{x}) = \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} u dS$$

für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$, dann ist u harmonisch.

Beweis:

Ist $\Delta u \neq 0$, so existiert eine Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$, sodass $\Delta u > 0$ innerhalb von $B(\mathbf{x}, r)$ gilt. Wir wissen aber, dass

$$0 = \phi'(r) = \frac{r}{n} \fint_{B(\mathbf{x},r)} \Delta u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} > 0$$

was zu einem Widerspruch führt. Also ist u harmonisch.

Das **Maximumprinzip** harmonischer Funktionen: $\Delta u = 0$

Satz: Sei $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ harmonisch in U. Dann gilt:

1) **Maximumprinzip**

$$\max_{\mathbf{x}\in\overline{U}} u(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x}\in\partial U} u(\mathbf{x})$$

2) **Starkes Maximumprinzip**
   Ist U zusammenhängend und existiert ein Punkt $\mathbf{x}_0 \in U$ mit

$$u(\mathbf{x}_0) = \max_{\mathbf{x}\in\overline{U}} u(\mathbf{x})$$

   so folgt, dass u auf U konstant ist.

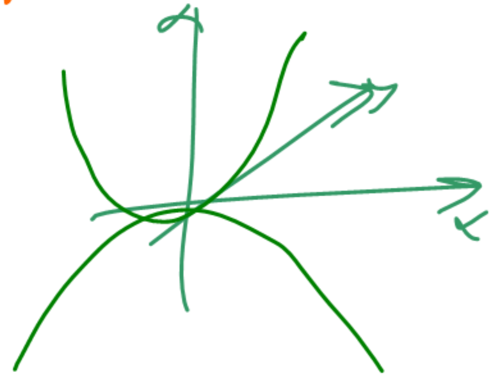
Beweisidee:

Verwende auf geeignete Weise die **Mittelwerteigenschaft** harmonischer Funktionen.

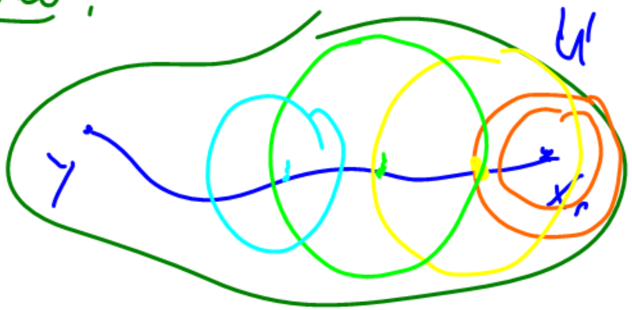
$n=1$ $\quad u_{xx}=0$ $\quad u(x) = a + bx$

$n=2$ $\quad u_{xx}+u_{yy}=0$ $\quad u(x) = -x^2 - y^2$ ist nicht harm $\quad \Delta u \neq 0$

$u(x) = -x^2 + y^2 \quad \Delta u = 0$



Bew idee:



einf zh. $x, y \in U$ $\exists$ c Kurve $c(0)=x$, $c(1)=y$

MWE $\Rightarrow$ u in ○ konst

$u(x) = \cancel{u(y)}$

Wichtige Folgerung aus dem Maximumprinzip:

$\Rightarrow$ **Eindeutige Lösung der Randwertaufgabe**

Satz: Sei $g \in C(\partial U)$, $f \in C(U)$. Dann existiert höchstens eine Lösung $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{in } U \\ u &= g \quad \text{auf } \partial U \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} -\Delta u_1 = f \\ -\Delta u_2 = f \end{array}\right\} U$ $\quad$ $\left.\begin{array}{l} u_1 = g \\ u_2 = g \end{array}\right\} \partial U$

$-\Delta(u_1 - u_2) = 0$ $\quad$ $u_1 - u_2 = 0$

Beweis:

Seien u_1 und u_2 zwei Lösungen. Dann löst $w = \pm(u_1 - u_2)$ das Randwertproblem

weil linear!!!

$$\begin{cases} -\Delta w &= 0 \quad \text{in } U \\ w &= 0 \quad \text{auf } \partial U \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} \text{Max} \to u \le 0 \\ \text{Min} \to u \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow u = 0$

Aus dem Maximumprinzip folgt dann direkt

$$w = \pm(u_1 - u_2) = 0$$

identisch auf U und daher gilt $u_1 = u_2$.

Weitere Eigenschaften:

1) Erfüllt eine stetige Funktion $u \in C(U)$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$ die **Mittelwerteigenschaft**, so ist u unendlich oft differenzierbar, d.h. $u \in C^\infty(U)$.

2) **Satz von Liouville:**
Die Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei harmonisch und beschränkt. Dann folgt bereits, dass u auf ganz $\mathbb{R}^n$ konstant ist.

3) **Beschränkte** Lösungen der Poissongleichung:
Sei $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 3$. Dann hat jede beschränkte Lösung der Poissongleichung $-\Delta u = f \quad$ in $\mathbb{R}^n$ die Form

$$u(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + C$$

mit einer Konstanten C.

zu i Eindeutigkeit

$$0 = \int_U w \,\Delta w \, dx = -\int_U \nabla w \cdot \nabla w \, dx + \underbrace{\cancel{\int_{\partial U} w \, n \cdot \nabla w \, dS}}_{\overset{\|}{0}} = -\int_U |\nabla w|^2 \, dx$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla w = 0$$

$$\Rightarrow w = \text{const}$$

$$\Rightarrow w = 0 \quad (\text{weil } w = 0 \text{ auf } \partial U)$$

Energiemethode.

4.3 Die Greensche Funktion

Definition:

1) Das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U \\ u = g & \text{auf } \partial U \end{cases}$$

nennt man das **Dirichlet–Problem** der Poissongleichung (bzw. der Laplacegleichung, falls $f = 0$).

2) Das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{auf } \partial U \end{cases}$$

nennt man das **Neumann–Problem** der Poissongleichung (bzw. der Laplacegleichung, falls $f = 0$).
Hierbei bezeichnet n die äußere Normale an ∂U.

$n=1$

$$\int f_{\alpha\alpha} g - f g_{\alpha\alpha} = -\int \cancel{f_\alpha g_\alpha - f_\alpha g_\alpha} + \Big| f_\alpha g - \Big| f g_\alpha$$

$n>1$

$$\int_U \Delta f\, g - f \Delta g = -\int_U \cancel{\nabla f \cdot \nabla g - \nabla f \cdot \nabla g} + \int_{\partial U} \underbrace{n \cdot \nabla f}_{\frac{\partial f}{\partial n}}\, g \, dS - \int_{\partial U} f\, \underbrace{n \cdot \nabla g}_{\frac{\partial g}{\partial n}} \, dS$$

$$-\int \cancel{\overbrace{\Delta \phi(x-y)}^{=0}}\, u(y) + \int \phi(x-y) \Delta u \, dy = \int_{\partial V_\varepsilon} \phi(x-y) \frac{\partial u}{\partial n} - \int u \frac{\partial \phi}{\partial n}$$

$V_\varepsilon = U - B(x,\varepsilon)$

$\partial V_\varepsilon = \partial U \cup \partial B(x,\varepsilon)$

$\varepsilon \to 0$

Proposition:

Sei $u \in \mathcal{C}^2(\bar{U})$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt für alle Punkte $\mathbf{x} \in U$ die Beziehung

$$
\begin{aligned}
u(\mathbf{x}) \;&=\; \int\limits_{\partial U} \left(\Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) - \underbrace{u(y)}_{=g}\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}-\mathbf{x})\right) dS(\mathbf{y}) \\
&\quad - \int\limits_{U} \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x})\underbrace{\Delta u(\mathbf{y})}_{=f}\, d\mathbf{y}
\end{aligned}
$$

Keine Lösungsformel

Die Funktion Φ bezeichnet dabei wieder die Fundamentallösung der Laplacegleichung.

Beweis: Greensche Formeln aus Analysis III.

Anwendung auf Randwertprobleme der Laplace– und Poissongleichung:

Wir können im Prinzip die Lösung an jedem Punkt berechnen, aber benötigen dazu Randdaten sowohl für u als auch die Ableitung $\partial u/\partial \mathbf{n}$.

Definition:

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi^x(\mathbf{y})$ die Lösung des Dirichlet–Problems

$$\begin{cases} \Delta_y \Phi^x(y) = 0 & \text{in } U \\ \Phi^x(y) = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) & \text{auf } \partial U \end{cases} \qquad x \notin \partial U$$

Dann ist die **Greensche Funktion** auf U gegeben durch

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi^x(\mathbf{y}) \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y})$$

Satz:

Sei $u \in \mathcal{C}^2(\bar{U})$ eine Lösung des Dirichlet–Problems der Poissongleichung. Dann läßt sich u in der Form

$$u(\mathbf{x}) = -\int\limits_{\partial U} g(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) + \int\limits_{U} f(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (\mathbf{x} \in U)$$

darstellen.

Lösung [illegible] !!

Beweis:

Nach obiger Proposition hatten wir die Lösungsdarstellung

$$u(\mathbf{x}) = \int\limits_{\partial U} \left(\Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) - \underbrace{u(\mathbf{y})}_{=g}\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}-\mathbf{x})\right)dS(\mathbf{y}) - \int\limits_{U} \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x})\underbrace{\Delta u(\mathbf{y})}_{=f}d\mathbf{y}$$

Das Problem dabei war, dass uns beim Dirichlet–Problem die Randdaten von $\partial u/\partial \mathbf{n}$ nicht bekannt sind.

Nach den Greenschen Formeln gilt aber

$$\cancel{\int_U \Delta\Phi^x(y)\,u(y)\,dy}$$

$$-\int\limits_{U} \Phi^x(\mathbf{y})\underbrace{\Delta u(\mathbf{y})}_{=f}d\mathbf{y} = \int\limits_{\partial U} \underbrace{u(\mathbf{y})}_{g}\frac{\partial \Phi^x}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) - \Phi^x(\mathbf{y})\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y})dS(\mathbf{y})$$

und daher

$$\int\limits_{\partial U} \Phi^x(\mathbf{y})\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y})dS(\mathbf{y}) = \int\limits_{U} \Phi^x(\mathbf{y})\Delta u(\mathbf{y})d\mathbf{y} + \int\limits_{\partial U} u(\mathbf{y})\frac{\partial \Phi^x}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y})dS(\mathbf{y})$$

Aus der Randbedingung $\Phi^x(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x})$ folgt

$$\int_{\partial U} \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x})(\mathbf{y})\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y})dS(\mathbf{y}) = \int_U \Phi^x(\mathbf{y})\Delta u(\mathbf{y})d\mathbf{y} + \int_{\partial U} u(\mathbf{y})\frac{\partial \Phi^x}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y})dS(\mathbf{y})$$

Wir erhalten damit unter Ausnutzung der obigen Proposition:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) \;&=\; \int_{\partial U} \underbrace{u(\mathbf{y})}_{f}\underbrace{\left(\frac{\partial \Phi^x(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}}\right)}_{-\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}}} dS(\mathbf{y}) \\ &\quad + \int_U \underbrace{(\Phi^x(\mathbf{y}) - \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}))}_{-G(\mathbf{x},\mathbf{y})} \underbrace{\Delta u(\mathbf{y})}_{f} d\mathbf{y} \end{aligned}$$

Eigenschaften der Greenschen Funktion

1) die Greensche Funktion $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ ist bis auf den Punkt $\mathbf{y}=\mathbf{x}$ harmonisch in $\mathbf{y}$,

in $y=x$ singulär $(\Phi(x-y))$

2) $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ erfüllt homogene Randbedingungen, d.h.

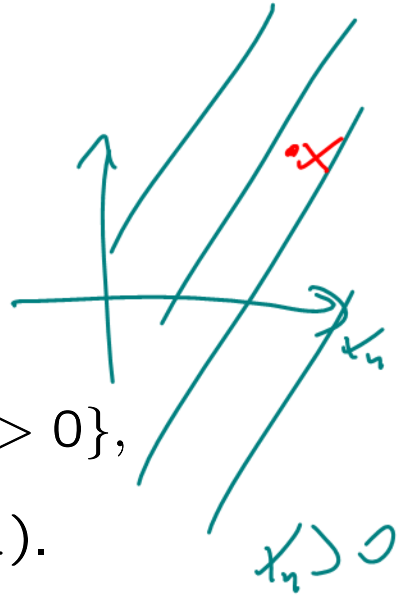
$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 \quad \forall\, \mathbf{y} \in \partial U,\ \mathbf{x} \in U,$$

3) die Greensche Funktion ist eindeutig bestimmt,

4) die Greensche Funktion ist symmetrisch, d.h.

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = G(\mathbf{y},\mathbf{x})$$

$\tilde{x}$



Beispiele:

1) die Greensche Funktion für den Halbraum

$$\mathbb{R}^n_+ = \{\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)^T \,:\, x_n > 0\},$$

2) die Greensche Funktion für die Einheitskugel $B(0,1)$.

Die Greensche Funktion für den Halbraum $\mathbb{R}^n_+$:

Allgemein ist die Greensche Funktion gegeben durch

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - \Phi^x(\mathbf{y})$$

Dabei ist $\Phi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ die Fundamentallösung und $\Phi^x(\mathbf{y})$ die Lösung von

zu lösen:

$$\begin{cases} \Delta_y \Phi^x(y) = & 0 & \text{in } \mathbb{R}^n_+ \\ \Phi^x(y) = & \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) & \text{auf } \{\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)^T \ : \ x_n = 0\} \end{cases}$$

Für einen Punkt $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ definieren wir die Reflektion an der Ebene $\partial\mathbb{R}^n_+$ mittels

$$\tilde{x} = (x_1,\ldots,x_{n-1},-x_n)$$

Wir betrachten nun die Funktion

Raten:

$$\Phi^x(\mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}}) = \Phi(y_1-x_1,\ldots,y_{n-1}-x_{n-1},y_n+x_n) \quad (x,y \in \mathbb{R}^n_+)$$

$\tilde{x} \notin \mathbb{R}^n_+$ falls $x \in \mathbb{R}^n_+$

$\Delta_y \Phi^x(y) = 0$ in $\mathbb{R}^n_+$

Dann ist $\Phi^x(\mathbf{y})$ harmonisch auf dem **ganzem** Halbraum $\mathbb{R}^n_+$ und auf dem Rand gilt:

am Rande $x = \tilde{x}$

$$\begin{aligned}\Phi^x(\mathbf{y}) &= \Phi(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}}) = \Phi(y_1 - x_1, \ldots, y_{n-1} - x_{n-1}, x_n) \\ &= \Phi(y_1 - x_1, \ldots, y_{n-1} - x_{n-1}, -x_n) = \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}),\end{aligned}$$

da die Fundamentallösung nur von $|\mathbf{y}-\mathbf{x}|$ abhängt.

Also löst die Funktion $\Phi^x(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}})$ das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta\Phi^x = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n_+ \\ \Phi^x = \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) & \text{auf } \{\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T \,:\, y_n = 0\} \end{cases}$$

und die Greensche Funktion für den Halbraum $\mathbb{R}^n_+$ lautet

$$\boxed{G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}})} \qquad (\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_+,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y})$$

$\phi = \frac{1}{n\alpha_n} \frac{1}{\|x\|^{n-1}}$

Man berechnet nun

$$\frac{\partial G}{\partial y_n}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}})$$

$$= \frac{-1}{n\alpha(n)}\left[\frac{y_n - x_n}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^n} - \frac{y_n + x_n}{|\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}}|^n}\right]$$

und damit gilt für $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}^n_+$

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\frac{\partial G}{\partial y_n}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\frac{2x_n}{n\alpha(n)}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n}$$

Definition:

Die Funktion

$$K(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \frac{2x_n}{n\alpha(n)}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+,\ \mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}^n_+)$$

nennt man auch den Poissonkern von $\mathbb{R}^n_+$.

Satz: (Dirichlet–Problem für die Laplacegleichung)

Die Lösung des Randwertproblems

$f=0$

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n_+ \\ u &= g \quad \text{auf } \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \,:\, x_n = 0\} \end{cases}$$

ist gegeben durch die Poissonsche Integralformel

$$\boxed{u(\mathbf{x}) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n} d\mathbf{y}}$$

Insbesondere ist die Lösung $u(\mathbf{x})$ wegen

$$\int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dy = 1$$

beschränkt, falls g beschränkt ist, Man kann weiter zeigen, dass die Lösung sogar **unendlich oft differenzierbar** ist.

falls $f=0$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(y) \left(\phi(x-y) - \phi(\tilde{x}-y)\right) dx$$

Die Greensche Funktion für die Einheitskugel $B(0,1)$:

Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, bezeichnet der Punkt

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2}$$

den **dualen Punkt** von $\mathbf{x}$ bezüglich $\partial B(0,1)$.

Damit ist die Lösung des Korrekturproblems

$$\begin{cases} \Delta\Phi^x = 0 & \text{in } B^0(0,1) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \quad |\mathbf{x}| < 1\} \\ \Phi^x = \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) & \text{auf } \partial B(0,1) \end{cases}$$

gegeben durch

$$\Phi^x(\mathbf{y}) := \Phi(|\mathbf{x}|(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}}))$$

und wir erhalten folgende Greensche Funktion für die Einheitskugel:

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - \Phi(|\mathbf{x}|(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}})) \quad (\mathbf{x},\mathbf{y} \in B(0,1), \mathbf{x} \neq \mathbf{y})$$

Satz: (Dirichlet–Problem für die Laplacegleichung)

Die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T : |\mathbf{x}| < 1\} \\ u = g & \text{auf } \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T : |\mathbf{x}| = 1\} \end{cases}$$

ist gegeben durch die Poissonsche Integralformel

$$\boxed{u(\mathbf{x}) = \frac{1 - |\mathbf{x}|^2}{n\alpha(n)} \int\limits_{|\mathbf{y}|=1} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} dS(\mathbf{y})}$$

Der **Poissonkern** für die Einheitskugel lautet demnach

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{1 - |\mathbf{x}|^2}{n\alpha(n)} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \quad (|\mathbf{x}| < 1, |\mathbf{y}| = 1)$$

Bemerkung:

Mit Hilfe der Transformation $\tilde{u}(\mathbf{x}) = u(r\mathbf{x})$ kann man leicht eine Darstellung für die Kugel $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| < r\}$ ableiten.