Kapitel 4: Die Laplacegleichung

$n=1 \quad u_{xx}=0$

$u(x)=a+bx$

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Laplacegleichung

$\cancel{u_t} = \Delta u$ $\xrightarrow{\text{stationär}}$

$$\Delta u = 0, \qquad u = u(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}$$

und der zugehörigen Poissongleichung

$\cancel{u_t} - \Delta u = f$ $\xrightarrow{\text{stationär}}$

$$-\Delta u = f$$

mit vorgegebener rechten Seite $f = f(\mathbf{x})$.

Definition:

Eine $\mathcal{C}^2$–Funktion $u = u(\mathbf{x})$, die die Laplacegleichung erfüllt, d.h. es gilt

$$\Delta u = 0,$$

nennt man eine **harmonische Funktion**.

4.1 Die Fundamentallösung

Wir versuchen zunächst, eine explizite Lösung der Laplacegleichung zu berechnen, mit Hilfe der wir weitere Lösungsdarstellungen ableiten können.

Beobachtung:

Der Laplaceoperator Δ ist invariant gegenüber Rotationen in $\mathbb{R}^n$

Lösungsansatz:

$$\boxed{u(\mathbf{x}) = v(r),} \quad r = \|\mathbf{x}\| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$$

Man rechnet leicht nach: $\frac{\partial u}{\partial x_i} = v'(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i}$

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{-1/2}\, 2x_i = \frac{x_i}{r} \quad (x \neq 0)$$

und damit gilt für $i = 1, \ldots, n$:

$$u_{x_i} = v'(r)\frac{x_i}{r}, \quad u_{x_i x_i} = v''(r)\,\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right)$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = v''(r)\,\frac{\sum x_i^2 = r^2}{r^2} + v'(r)\left(\frac{\sum_i 1}{r} - \frac{\sum x_i^2 = r^2}{r^3}\right) = v''(r) + v'(r)\left(\frac{n}{r} - \frac{1}{r}\right)$$

$n=2$

$$\Delta u = \frac{1}{r}\partial_r\left(r\,\partial_r u\right) + \cancel{\frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 u} = 0$$

$1 = 2-1$

$u = u(r)$

$$\partial_{rr} u + \frac{1}{r}\partial_r u = 0$$

$n=3$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r u\right) + \cancel{\sin\theta\,\partial_\theta}\ \ \varphi\ \ \cancel{\partial_\varphi}$$

$2 = 3-1$

$u = u(r)$

$$\partial_{rr} u + \frac{2}{r}\partial_r u = 0$$

$n=4$

$$\Delta u = \frac{1}{r^3}\partial_r\left(r^3\partial_r u\right) + \dots$$

Wir erhalten also

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r)$$

und mit $\Delta u = 0$ ergibt sich die gewöhnliche Differentialgleichung

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0$$ linear 2. O.

Setzen wir $\boxed{w = v'} \neq 0$, so löst w die lineare Differentialgleichung

$$w' = -\frac{n-1}{r} w$$ linear 1. O

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist gegeben durch

$$w(r) = \frac{\alpha}{r^{n-1}}$$

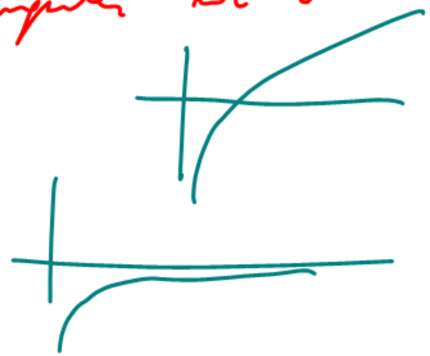
mit einer Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$. Für $v(r)$ gilt demnach

$$v' = \frac{\alpha}{r^{n-1}}$$

Die Gleichung für v können wir integrieren und bekommen damit eine Lösung in der Form

Singulär bei $r \to 0$!

$$v(r) = \begin{cases} -b \log r + c & (n = 2) \\ \dfrac{b}{r^{n-2}} + c & (n \geq 3) \end{cases}$$



mit den beiden Konstanten b und c.

Definition:

$\|x\| = 1$

Die Funktion

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \log \|x\| & (n = 2) \\ \dfrac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \|x\|^{2-n} & (n \geq 3) \end{cases}$$

definiert für $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, nennt man die **Fundamentallösung der Laplacegleichung**. Die Konstante $\alpha(n)$ bezeichnet dabei das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$.

Spezialfall $f = c$

$$c \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y)\, dy = c \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y)\, d(x-y) = c \int \phi(z)\, dz =$$

$$= c \int_{B(0,R)} \qquad + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} \qquad =$$

$$= c \int \frac{a}{r^{n-2}} r^{n-1} dr \underbrace{(d\varphi \dots)}_{\text{Vol. Einheitsk.}} + \dots =$$

$$= c \int r \, dr \qquad + \dots \qquad c\, a \left(\frac{R^2}{2}\right) + \dots \sim$$

Bemerkung:

Die Fundamentallösung ist für alle $\mathbf{x} \neq 0$ eine harmonische Funktion.

Beispiel:

Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ gilt vol $(K_1(0)) = \alpha(3) = 4\pi/3$ und damit ist die Fundamentallösung gegeben durch

$n(n-2)\alpha(n) =$

$n=3$ $\quad 3 \cdot 1 \cdot \frac{4}{3}\pi = 4\pi$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}$$

Satz: (Darstellung der Lösung der Poissongleichung)

Eine Lösung der Possiongleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

ist gegeben durch

Integration über $\mathbb{R}^n$ auch bei $y = x$

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}$$

$$\Delta u(x) = \Delta_x \int \quad = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\Delta_x \phi(x - y)}_{=0} f(y)\, dy = 0$$

4.2 Eigenschaften harmonischer Funktionen

Die **Mittelwerteigenschaft:**

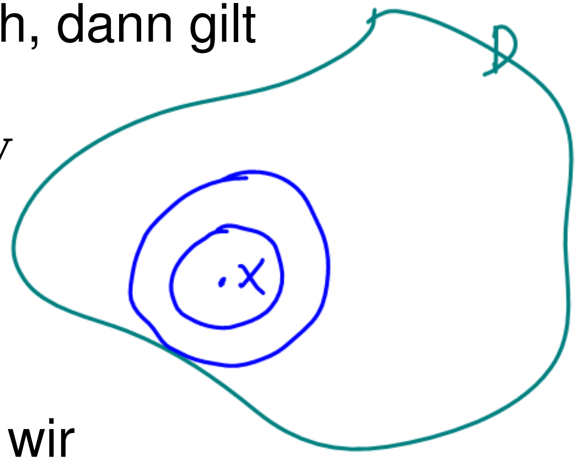
Eine besondere Eigenschaft harmonischer Funktionen ist, dass der Funktionswert an einer Stelle $\mathbf{x}$ stets gleich dem Mittelwert von u über eine Kugel mit Mittelpunkt $\mathbf{x}$ bzw. der zugehörigen Sphäre um $\mathbf{x}$ ist.

Satz:

$\Delta u = 0$

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Ist $u \in C^2(U)$ harmonisch, dann gilt

$$u(\mathbf{x}) = \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} u \, dS = \fint_{B(\mathbf{x},r)} u \, d\mathbf{y}$$



für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$.

Notation:

Bei Mittelungen über die Kugel oder die Sphäre schreiben wir

$$\fint \ldots = \frac{1}{\mathrm{vol}(B(\mathbf{x}, r))} \int \ldots$$

Beweis:

Wir definieren für festes $\mathbf{x} \in U$ die Funktion $\phi(r)$ durch

$$\phi(r) := \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} u(\mathbf{y})\, dS(\mathbf{y}) = \fint_{\partial B(0,1)} u(\mathbf{x} + r\mathbf{z})\, dS(\mathbf{z})$$

Dann gilt

$$\phi'(r) = \fint_{\partial B(0,1)} Du(\mathbf{x} + r\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z}\, dS(\mathbf{z})$$

und mit Hilfe der Greenschen Formeln erhalten wir

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} Du(\mathbf{y}) \cdot \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{r}\, dS(\mathbf{y}) \\ &= \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, dS(\mathbf{y}) \\ &= \frac{r}{n} \fint_{B(\mathbf{x},r)} \Delta u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = 0 \end{aligned}$$

Damit ist ϕ konstant und es gilt

$$\phi(r) = \lim_{t \to 0} \phi(t) = \lim_{t \to 0} \fint_{\partial B(\mathbf{x},t)} u(\mathbf{y})\, dS(\mathbf{y}) = u(\mathbf{x})$$

Unter Verwendung von Polarkoordinaten erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \int\limits_{B(\mathbf{x},r)} u\, d\mathbf{y} &= \int\limits_0^r \left(\int\limits_{\partial B(\mathbf{x},s)} u dS \right) ds \\ &= u(\mathbf{x}) \int\limits_0^r n\alpha(n) s^{n-1} ds = \alpha(n) r^n u(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich gerade die Mittelwertformel

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\alpha(n) r^n} \int\limits_{B(\mathbf{x},r)} u\, d\mathbf{y}$$

Es gilt auch folgende Umkehrung

Satz:

Für die Funktion $u \in C^2(U)$ gelte

$$u(\mathbf{x}) = ⨍_{\partial B(\mathbf{x},r)} u dS$$

für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$, dann ist u harmonisch.

Beweis:

Ist $\Delta u \neq 0$, so existiert eine Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$, sodass $\Delta u > 0$ innerhalb von $B(\mathbf{x}, r)$ gilt. Wir wissen aber, dass

$$0 = \phi'(r) = \frac{r}{n} ⨍_{B(\mathbf{x},r)} \Delta u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} > 0$$

was zu einem Widerspruch führt. Also ist u harmonisch.

RB 3

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$$

$$u(x,t) = b_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$\frac{db_n}{dt} + \dots = c_n(t)$$

$$b_n(0) = b_n$$

RB 4

$$u(0,t) = u(l,t)$$

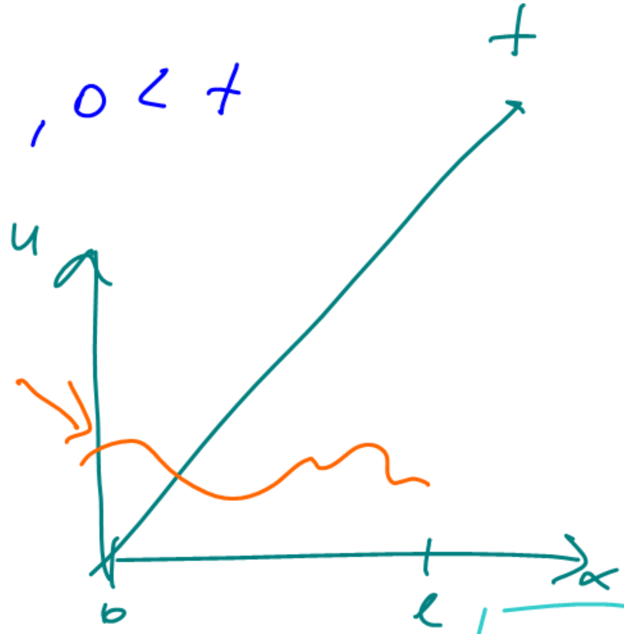
$$u_x(0,t) = u_x(l,t)$$

$$u(x,t) = b_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l} + b_n(t) \cos\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Fourier Methode

$$u_t = u_{xx} + f(x,t) \qquad 0 < x < \ell \;,\; 0 < t$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad \text{AB}$$



RB: 1) $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$

Ansatz $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin \frac{n\pi x}{\ell}$

$\Rightarrow \frac{da_n}{dt} + \dots = c_n(t)$ FK f

$a_n(0) = b_n$ FK f

RB 2) $u(0,t) = 0$

$u_x(\ell,t) = 0$ (isoliert)

Ansatz $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2\ell}$

$\frac{da_n}{dt} + \dots = c_n(t)$

$a_n(0) = b_n$

Mit dem Lösungsansatz

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right)$$

erhalten wir durch Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung und Koeffizientenvergleich mit der Fourier–Reihe von $g(x)$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{da_n}{dt} + \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4 \cdot 50^2} a_n &= 0 \\ a_n(0) &= b_n \end{aligned}$$

$n = 1, 2, \ldots.$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet dann

$$a_n(t) = b_n e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{10000} t}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{100}\right)$$

Sind beide Enden **wärmeisoliert**, so haben wir das Anfangsrandwertproblem

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t - u_{xx} & = & f(x,t) & : \ 0 < x < l,\ 0 < t \leq T \\ u(x,0) & = & g(x) & : \ 0 \leq x \leq l \\ u_x(0,t) & = & 0 & : \ 0 \leq t \leq T \\ u_x(l,t) & = & 0 & : \ 0 \leq t \leq T \end{array}\right.$$

Jetzt erfüllen die Funktionen

$$u(x,t) = 1, \qquad u(x,t) = \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

die vorgegebenen Neumannschen Randbedingungen.
Ein **Lösungsansatz** lautet damit

$$u(x,t) = b_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Beispiel:

Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & : \ 0 < x < 50, \ 0 < t \le T \\ u(x,0) = 5 - \frac{1}{5}|x - 25| & : \ 0 \le x \le 50 \\ u_x(0,t) = 0 & : \ 0 \le t \le T \\ u_x(50,t) = 0 & : \ 0 \le t \le T \end{cases}$$

Mit dem Lösungsansatz

$$u(x,t) = b_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right)$$

ergibt sich durch Einsetzen in die Differentialgleichung

$$\frac{db_0}{dt}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{db_n}{dt}(t) + \frac{n^2\pi^2}{50^2} b_n(t) \right) \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right) = 0$$

Das System gewöhnlicher Differentialgleichungen lautet dann

$$\frac{db_0}{dt}(t) = 0, \qquad \frac{db_n}{dt}(t) + \frac{n^2\pi^2}{50^2} b_n(t) = 0$$

Um die zugehörigen Anfangsbedingungen festzulegen, bestimmen wir die Fourier–Reihe der Anfangsbedingung $g(x)$, d.h.

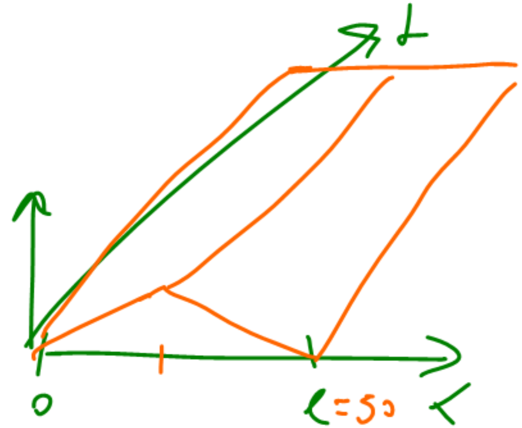
$$g(x) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right)$$

mit den Fourier–Koeffizienten

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{1}{50} \int_0^{50} g(x)\, dx \\ d_n &= \frac{2}{50} \int_0^{50} g(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right) dx \end{aligned}$$

Man berechnet

$$
\begin{aligned}
d_0 &= \frac{5}{2} \\
d_n &= \frac{20(2\cos(n\pi/2) - 1 - (-1)^n)}{n^2\pi^2}
\end{aligned}
$$



Die Koeffizienten $b_0(t), b_1(t), \ldots$ ergeben sich damit als

$$b_n(t) = d_n e^{-\lambda_n t}$$

mit

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{2500}$$

und die Lösung lautet

$$u(x,t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n t} \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right)$$

Wir kommen nun zu **periodischen** Randbedingungen und dem Anfangsrandwertproblem auf dem **Intervall** $[-l, l]$ gegeben durch

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_t - u_{xx} & = & f(x,t) & : \; -l < x < l, \, 0 < t \leq T \\ u(x,0) & = & g(x) & : \; -l \leq x \leq l \\ u(-l,t) & = & u(l,t) & : \; 0 \leq t \leq T \\ u_x(-l,t) & = & u_x(l,t) & : \; 0 \leq t \leq T \end{array} \right.$$

Periodische Funktionen auf dem Intervall $[-l, l]$ sind

$$\psi(x) = \frac{1}{2}, \quad \psi(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad \psi(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Ein **Lösungsansatz** mit Hilfe von Fourier–Reihen ist damit

$$u(x,t) = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right)$$

Mit den Reihenentwicklungen

$$
\begin{aligned}
f(x,t) &= c_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + d_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right) \\
g(x) &= p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(p_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + q_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right)
\end{aligned}
$$

ergeben sich die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$
\begin{aligned}
\frac{da_0}{dt}(t) &= c_0(t) \\
\frac{da_n}{dt}(t) + \frac{n^2\pi^2}{l^2} a_n(t) &= c_n(t) \\
\frac{db_n}{dt}(t) + \frac{n^2\pi^2}{l^2} b_n(t) &= d_n(t)
\end{aligned}
$$

Die zugehörigen Anfangsbedingungen lauten

$$a_0(0) = p_0, \quad a_n(0) = p_n, \quad b_n(0) = q_n$$

Beispiel:

Für das Anfangsrandwertproblem mit periodischen Randbedingungen

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_t - u_{xx} & = & \frac{1}{10}x(x^2 - \pi^2) & : \; -\pi < x < \pi, \; 0 < t \leq T \\ u(x,0) & = & 25 & : \; -\pi \leq x \leq \pi \\ u(-\pi,t) & = & u(\pi,t) & : \; 0 \leq t \leq T \\ u_x(-\pi,t) & = & u_x(\pi,t) & : \; 0 \leq t \leq T \end{array} \right.$$

ist die Fourier–Entwicklung der Lösung gegeben durch

$$u(x,t) = 25 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^n}{10n^5} \left(1 - e^{-n^2 t}\right) \sin(nx)$$

7.3. Fourier–Methoden für die Wellengleichung

Lösungen in Form von Fourier–Reihen lassen sich analog zur Wärmeleitungsgleichung ableiten.

Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(x,t) & : \ 0 < x < l,\ 0 < t \le T \\ u(x,0) = g(x) & : \ 0 \le x \le l \\ u_t(x,0) = h(x) & : \ 0 \le x \le l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & : \ 0 \le t \le T \end{cases}$$

und suchen eine Lösung in der Form

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$\Longrightarrow$ $\frac{d^2 a_n}{dt} + \ldots a_n = c_n$ FK f

$a_n(0) = b_n$ FK g

$\frac{d}{dt} a_n(0) = d_n$ FK h

Die Fourier–Reihen für $f(x,t)$, $g(x)$ und $h(x)$ ergeben DGL's für die Lösungskoeffizienten $a_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$.

Beispiel:

Die Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & : \ 0 < x < l,\ 0 < t \leq T \\ u(x,0) = g(x) & : \ 0 \leq x \leq l \\ u_t(x,0) = h(x) & : \ 0 \leq x \leq l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & : \ 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

ist gegeben durch

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\left\{ b_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}t\right) + \frac{d_n l}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{l}t\right) \right\}}^{e_n(t)} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Dabei sind b_n die Fourier–Koeffizienten der Entwicklung der vorgegeben Anfangsbedingung $u(x,0) = g(x)$ und d_n die entsprechenden Koeffizienten von $u_t(x,0) = h(x)$.