2. Ordnung, skalar, linear

x Raum, t Zeit

f Inhomogenität.

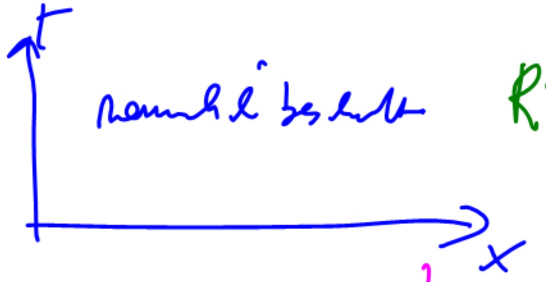
i) elliptisch $\quad -\Delta u = f$

ii) parabolisch $\quad u_t = \Delta u + f$

iii) hyperbolisch $\quad u_{tt} = \Delta u + f$

Gebiet z.B. Rechteck, Kreisgebiet

+ Randbedingung (RB) unbeschränkt



zeitlich $t \in [0,\infty)$,

$t \in [0,T]$

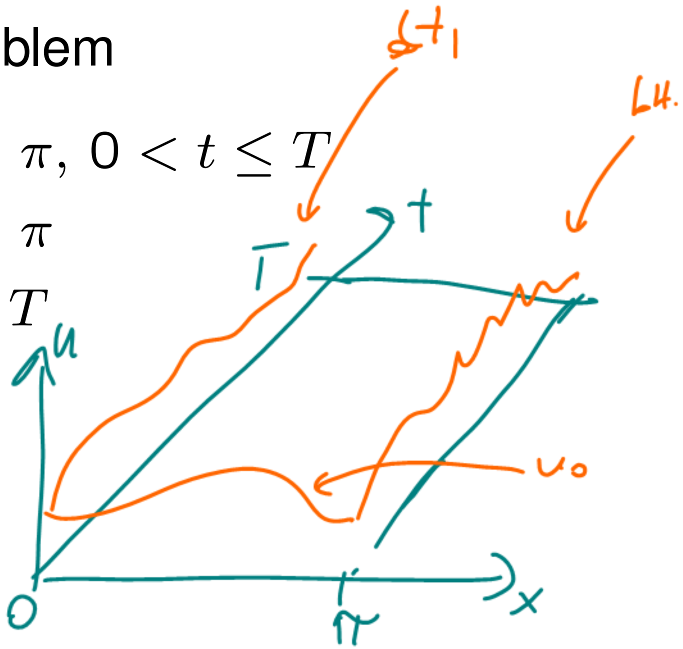
Anfangsbedingungen bei $t=0$ (AB)

Spezialfall: $x \in \mathbb{R}^n$, nur AB

Cauchyproblem.

5.1 Lösungen mittels Produktansätzen

Gegeben sei das eindimensionale Anfangs–Randwertproblem



$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & : \; 0 < x < \pi,\; 0 < t \le T \\ u(x,0) = u_0(x) & : \; 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = a(t),\; u(\pi,t) = b(t) & : \; 0 \le t \le T \end{cases}$$

Wir suchen eine Lösung mittels des **Produktansatzes**:

$$u(x,t) = p(x) \cdot q(t)$$

Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung ergibt

$$p(x)\dot{q}(t) = q(t)p''(x)$$

und damit die Beziehung

$$-\delta = -\delta(t) = \frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{p''(x)}{p(x)} \;\; {}^{-\delta(x)} \qquad (p(x) \neq 0,\; q(t) \neq 0)$$

In der Gleichung

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{p''(x)}{p(x)} \qquad (p(x) \neq 0,\ q(t) \neq 0)$$

steht

- auf der **linken** Seite ein Term, der nur von t abhängt,
- auf der **rechten** Seite ein Term, der nur von x abhängt.

Daraus folgt

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{p''(x)}{p(x)} = \text{const} =: -\delta$$

Wir erhalten also die beiden **gewöhnlichen** Differentialgleichungen

$$\dot{q}(t) + \delta\, q(t) = 0 \qquad \text{und} \qquad p''(x) + \delta\, p(x) = 0$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung $\dot{q}(t) + \delta\, q(t) = 0$ ist gegeben durch

$$q(t) = c_0\, e^{-\delta t},$$

Die Lösung der Gleichung $p''(x) + \delta\, p(x) = 0$ hängt entscheidend von der Konstanten δ ab:

1) Für $\delta = 0$ lautet die allgemeine Lösung

$$p(x) = c_1 x + c_2$$

unbeschr.

2) Für $\delta < 0$ lautet die allgemeine Lösung

$$p(x) = c_1 e^{-\sqrt{|\delta|}x} + c_2 e^{\sqrt{|\delta|}x}$$

unbeschr.

3) Für $\delta > 0$ lautet die allgemeine Lösung

$$p(x) = c_1 \sin(\sqrt{\delta}x) + c_2 \cos(\sqrt{\delta}x)$$

beschränkt

Ohne Berücksichtigung der vorgegebenen Anfangs– und Randbedingungen erhalten wir über den Produktansatz folgende Lösungsklassen:

$$\left.\begin{aligned}
&1) \quad & u(x,t) &= c_0\, e^{-\delta t} \cdot (c_1 x + c_2) \\
&2) \quad & u(x,t) &= c_0\, e^{-\delta t} \cdot (c_1 e^{-\sqrt{|\delta|}x} + c_2 e^{\sqrt{|\delta|}x}) \\
&3) \quad & u(x,t) &= c_0\, e^{-\delta t} \cdot (c_1 \sin(\sqrt{\delta}x) + c_2 \cos(\sqrt{\delta}x))
\end{aligned}\right\} \quad
\begin{aligned}
u(0,t) &= e^{-\delta t} \cdot \tilde{c} \\
u(\pi,t) &= e^{-\delta t}\, \tilde{\tilde{c}} \\
u(x,0) &= \{
\end{aligned}$$

Die vorgegebenen Anfangs– und Randbedingungen lauten

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u(0,t) = a(t), \qquad u(\pi,t) = b(t)$$

Fazit:

Die Parametermenge $\{c_0, c_1, c_2, \delta\}$ kann i.A. nicht gegebene Funktionen $u_0(x), a(t)$ und $b(t)$ beschreiben.
Der Produktansatz liefert nur bei speziellen Anfangs– und Randbedingungen eine explizite Lösung.

Beispiel:

Gegeben sei das eindimensionale Anfangs–Randwertproblem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & : \; 0 < x < \pi,\; 0 < t \le T \\ u(x,0) = \sin x \;\; = u_0(x) & : \; 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = 0,\; u(\pi,t) = 0 & : \; 0 \le t \le T \end{cases}$$

$a(t) = b(t) = 0$

Aufgrund der vorgegebenen Randbedingungen fallen grundsätzlich die ersten beiden Lösungsklassen aus. Es bleibt also

$$u(x,t) = c_0\, e^{-\delta t} \cdot (c_1 \sin(\sqrt{\delta} x) + c_2 \cos(\sqrt{\delta} x))$$

Wegen der Vorgabe $u(x,0) = \sin x$ erhalten wir die Lösung

$u(x,0) = c_0 (c_1 \sin\sqrt{\delta} x + c_2 \cos\sqrt{\delta} x)$

$$\boxed{u(x,t) = e^{-t} \sin x}$$

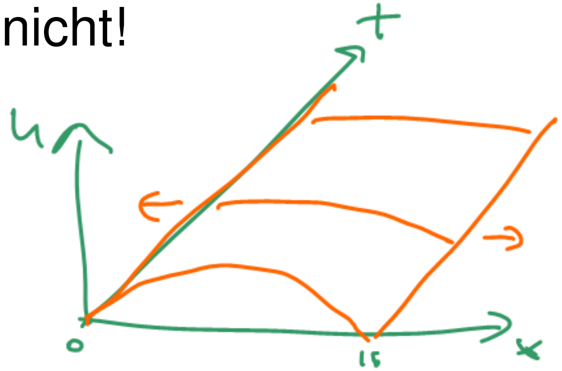
$\Rightarrow \delta = 1,\; c_2 = 0,\; c_0 c_1 = 1$

Das Beispiel sieht etwas künstlich aus, ist es aber nicht!

Wärmefluss $-u_x$ $\quad u_x(x,t) = e^{-t} \cos x$

links $-u_x(0,t) = -e^{-t} < 0$

rechts $-u_x(\pi,t) = +e^{-t} > 0$



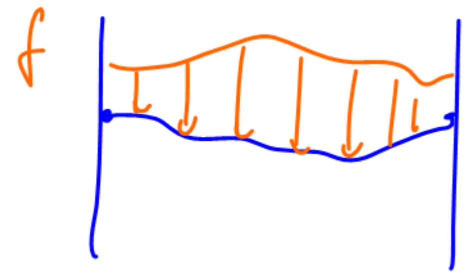
Kapitel 7: Fourier–Methoden bei partiellen Differentialgleichungen

In diesem Kapitel untersuchen wir allgemeine Fourier–Methoden zur (approximativen) Lösung von Anfangs–, Randwert– und Anfangsrandwertaufgaben.

7.1. Beispiel: Fourier–Methoden bei gewöhnlichen DGL's

Gegeben sei das eindimensionale Randwertproblem:

$$\begin{aligned} -T\,\frac{d^2u}{dx^2} &= f(x), \quad 0 < x < l \\ u(0) &= 0 \\ u(l) &= 0 \end{aligned}$$



Anwendung:

Die Lösung $u(x)$ beschreibt die Gleichgewichtslage eines eingespannten hängenden Seils mit Spannung T und extern angreifender Kraft $f(x)$.

Wir betrachten zunächst den **Spezialfall**:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

mit vorgegebenen Koeffizienten $c_1, \ldots, c_N$.
Die Inhomogenität $f(x)$ erfüllt insbesondere die homogenen Randbedingungen

$$f(0) = f(l) = 0$$

und wir suchen daher eine Lösung des Randwertproblems in der Form

$$u(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Damit sind die homogenenen Randbedingungen für **alle** Lösungskoeffizienten $b_1, \ldots, b_N \in \mathbb{R}$ erfüllt und wir versuchen die Koeffizienten b_n so zu bestimmen, dass $u(x)$ eine Lösung der vorgegebenen DGL ist.

Einsetzen in die DGL ergibt:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{Tn^2\pi^2}{l^2} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \sum_{n=1}^{N} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Für die Koeffizienten $b_1, \ldots, b_N$ gilt also

$$b_n = \frac{l^2 c_n}{Tn^2\pi^2}, \quad n = 1, \ldots, N$$

und wir erhalten demnach als Lösung des Randwertproblems

$$u(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{l^2 c_n}{Tn^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Beispiel:

Für die Inhomogenität $f(x) = \sin(\pi x) - 2\sin(2\pi x) + 5\sin(3\pi x)$ und $l = T = 1$ lautet die Lösung

$$u(x) = \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x) - \frac{1}{2\pi^2}\sin(2\pi x) + \frac{5}{9\pi^2}\sin(3\pi x)$$

Der allgemeine Fall:

Approximiere $f(x)$ durch eine **endliche Fourier–Reihe** $f_N(x)$, d.h.

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

mit den **Fourier–Koeffizienten**

$$c_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\,dx, \quad n = 1, \ldots, N$$

Siehe Analysis II: Fourier–Reihen (Kapitel 10, 11)

Eine **approximative Lösung** des Randwertproblems mit Inhomogenität $f(x)$ ist dann gegeben durch:

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{l^2 c_n}{Tn^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Beispiel:

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\frac{d^2u}{dx^2} &= x, \quad 0 < x < 1 \\ u(0) &= 0 \\ u(1) &= 0 \end{aligned}$$

Die exakte Lösung läßt sich durch **Integration** berechnen:

$$u'(x) = -\frac{x^2}{2} + a \quad \Rightarrow \quad u(x) = -\frac{x^3}{6} + ax + b$$

Mit den Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$ folgt:

$$u(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{1}{6}x = \frac{1}{6}x(1 - x^2)$$

Wir berechnen nun zunächst die Fourier–Koeffizienten der Funktion

$$f(x) = x,$$

also

$$c_n = 2\int_0^1 x \sin(n\pi x)\, dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}, \quad n = 1, \ldots, N$$

Damit ergibt sich eine **approximative** Lösung in der Form

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{n^2\pi^2} \sin(n\pi x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{2(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3} \sin(n\pi x)$$

Wir erhalten etwa

$$u_4(x) = \frac{2}{\pi^3}\sin(\pi x) - \frac{1}{4\pi^3}\sin(2\pi x) + \frac{2}{27\pi^3}\sin(3\pi x) - \frac{1}{32\pi^3}\sin(4\pi x)$$

Frage: Wie gut ist die approximative Lösung?

Antwort: Berechne die Fourier–Koeffizienten der exakten Lösung: mit

$$u(x) = \frac{1}{6}x(1-x^2)$$

folgt für die Fourier–Reihe

$$\tilde{u}_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \sin(n\pi x)$$

die Darstellung der Fourier–Koeffizienten

$$a_n = 2\int_0^1 \frac{1}{6}x(1-x^2)\sin(n\pi x)\,dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3}$$

Dies sind aber gerade die (Fourier–)Koeffizienten der **approximativen** Lösung!

7.2. Fourier–Methoden für die Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten folgendes Anfangsrandwertproblem der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} &= f(x,t) & : \ 0 < x < l,\ 0 < t \leq T \\ u(x,0) &= g(x) & : \ 0 \leq x \leq l \\ u(0,t) &= u(l,t) = 0 & : \ 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

und suchen eine Lösung in Form einer Fourier–Reihe, also

andere Interpretation:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}_{\text{erfüllt RB}}$$

„∞ $\sum$ von Produktansätzen"

Bemerkung:

Da wir nur Sinus–Funktionen in der Fourier–Reihe verwenden, sind die vorgegebenen homogenen Randbedingungen automatisch erfüllt.

Für die Koeffizienten der Fourier–Reihe gilt wiederum

$$a_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l u(x,t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

Gleichzeitig können wir die Inhomogenität $f(x,t)$ in einer Fourier–Reihe darstellen, d.h.

FK

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad c_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x,t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

Wir berechnen nun die Orts– und Zeitableitungen des Lösungsansatzes

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

und erhalten

die Beziehungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{da_n}{dt}(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\frac{n\pi}{l} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= -\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\frac{n^2\pi^2}{l^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$u_t - u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{da_n}{dt}(t) + a_n(t)\frac{n^2\pi^2}{l^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \overset{!}{=} f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

und wir erhalten durch Gleichsetzen mit der Fourier–Reihe von $f(x,t)$

ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen der Form

$$\boxed{\frac{da_n}{dt}(t) + a_n(t)\frac{n^2\pi^2}{l^2} = c_n(t)} \quad \forall n \in \{1, \dots\}$$

Die Anfangsbedingungen $a_1(0), a_2(0), \dots$ ergeben sich aus der Anfangsbedingung $u(x, 0) = g(x)$:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

und daher

$$\boxed{a_n(0) = b_n,} \quad n = 1, 2, \dots$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0) \sin\frac{n\pi x}{l} \overset{!}{=}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

Damit haben wir ein Anfangswertproblem für ein lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen, das zudem entkoppelt ist.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Die Lösung läßt sich also direkt angeben:

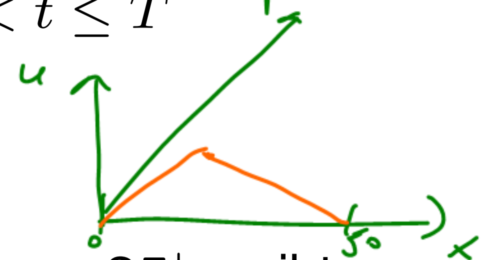
$$\boxed{a_n(t) = b_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2} \cdot t\right) + \int_0^t \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2} \cdot (t-s)\right) c_n(s)\, ds}$$

Beispiel:

Wir betrachten das homogene Anfangsrandwertproblem

$f = 0 \Rightarrow c_n = 0$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & : \ 0 < x < 50,\ 0 < t \leq T \\ u(x,0) = 5 - \frac{1}{5}|x-25| & : \ 0 \leq x \leq 50 \\ u(0,t) = u(50,t) = 0 & : \ 0 \leq t \leq T \end{cases}$$



Die Berechnung der Fourier–Koeffizienten von $g(x) = 5 - \frac{1}{5}|x-25|$ ergibt

$$b_n = \frac{1}{25} \int_0^{50} \left(5 - \frac{1}{5}|x-25|\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{50}\right) dx = \frac{40}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Da wir eine homogene Wärmeleitungsgleichung betrachten, folgt

$$a_n(t) = \frac{40}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{2500} \cdot t\right)$$

und die Lösung als Fourier–Reihe lautet

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{40}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{2500} \cdot t\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{50}\right)$$

Beobachtung:

1) Für festes $\cancel{T}\,t > 0$ fallen die Fourier–Koeffizienten $a_n(t)$ der Lösung exponentiell schnell für $n \to \infty$ ab. Höhere Werte für n beschreiben gerade die höheren Frequenzen in der Lösung.

2) Für festes n fallen die Fourier–Koeffizienten exponentiell schnell für $t \to \infty$ ab. Der Abfall ist umso schneller, je größer n ist. Für große Zeiten beschreiben also wenige Terme der Fourier–Reihe die exakte Lösung sehr gut.

Beispiel:

Wir betrachten das inhomogene Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} &= x = f(x,t) &: 0 < x < 1,\ 0 < t \leq T \\ u(x,0) &= 0 = g(x) &: 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 &: 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

$c_n \neq 0$

$b_n = 0$

Dann gilt mit den Bezeichnungen von oben

$$b_n = 0$$

$$c_n(t) = c_n = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

und damit

$$a_n(t) = 2\int_0^t e^{-n^2\pi^2(t-s)}\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\,ds = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3}\left(1 - e^{-n^2\pi^2 t}\right)$$

$a_n(0) = 0 = b_n$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

Bis jetzt:

Anfangsrandwertprobleme mit homogenen Randbedingungen, d.h.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x,t) & : \ 0 < x < l,\ 0 < t \leq T \\ u(x,0) = g(x) & : \ 0 \leq x \leq l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & : \ 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Was passiert

1) bei (einseitig **Neumannschen**) Randbedingungen der Form

Wärmebad $$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0,$$ Isolation

2) bei **periodischen** Randbedingungen der Form

$$u(0,t) = u(l,t), \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l,t)$$

Wie sehen die entsprechenden Fourier–Methoden aus?

Wir betrachten zunächst das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} &= f(x,t) &: 0 < x < l,\ 0 < t \le T \\ u(x,0) &= g(x) &: 0 \le x \le l \\ u(0,t) &= 0 &: 0 \le t \le T \\ u_x(l,t) &= 0 &: 0 \le t \le T \end{cases}$$

Bemerkung:

Beschreibt die Funktion $u(x,t)$ eine orts– und zeitabhängige Temperaturverteilung, so bedeutet

1) die Bedingung $u(0,t) = 0$, dass das linke Ende des Intervalls $[0,l]$ mit einem unendlich großen Eisbad in Kontakt steht,

2) die Bedingung $u_x(l,t) = 0$, dass am rechten Ende kein Wärmefluß nach rechts existiert, d.h. das rechte Ende des Intervalls ist **perfekt wärmeisoliert**.

Die Fourier–Reihe

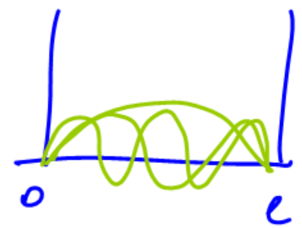
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$u_x(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi x}{l}$$

kann **keine** Lösung sein, denn unabhängig von den (zeitabhängigen) Koeffizienten gilt dann stets

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

bisher



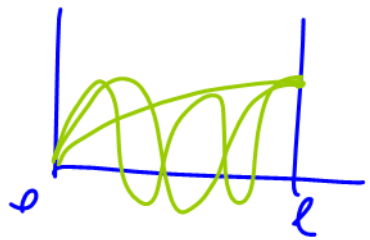
Die im Problem vorgegebenen Randbedingungen

$$u(0,t) = 0, \qquad u_x(l,t) = 0$$

werden zum Beispiel durch die Funktion

jetzt

$$u(x,t) = \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$$



erfüllt.

Diese Funktion beschreibt gerade eine Viertel–Sinuswelle.

Funktionen mit höheren Frequenzen erhalten wir, wenn wir daran eine halbe Sinuswelle anhängen, also

$$\sin\left(\frac{\pi x}{2l} + \frac{k\pi x}{l}\right), \qquad k \in \mathbb{N}$$

Die Funktionen höherer Frequenzen sind dann von der Form

$$u(x,t) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \quad n \geq 2$$

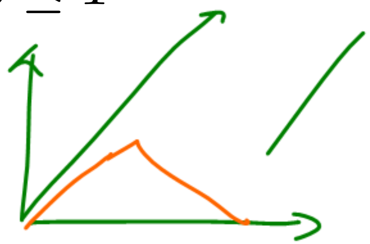
Ein **Lösungsansatz** für das vorgegebene Anfangsrandwertproblem, der automatisch die vorgegebenen Randbedingungen erfüllt, lautet damit

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right)$$

Beispiel:

Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem $f(x,t)=0$ $c_n=0$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & : \quad 0 < x < 50,\ 0 < t \leq T \\ u(x,0) = 5 - \frac{1}{5}|x-25| & : \quad 0 \leq x \leq 50 \\ u(0,t) = 0 & : \quad 0 \leq t \leq T \\ u_x(50,t) = 0 & : \quad 0 \leq t \leq T \end{cases}$$



Die Berechnung der Fourier–Koeffizienten von $g(x) = 5 - \frac{1}{5}|x-25|$ ergibt

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{25}\int_0^{50}\left(5 - \frac{1}{5}|x-25|\right)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{100}\right)dx \\ &= -\frac{80(-\sqrt{2}\sin(n\pi/2) + \sqrt{2}\cos(n\pi/2) - (-1)^n)}{\pi^2(2n-1)^2} \end{aligned}$$

Mit dem Lösungsansatz

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right)$$

erhalten wir durch Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung und Koeffizientenvergleich mit der Fourier–Reihe von $g(x)$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{da_n}{dt} + \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4\cdot 50^2} a_n &= 0 \\ a_n(0) &= b_n \end{aligned}$$

$n = 1, 2, \ldots$.

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet dann

$$a_n(t) = b_n e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{10000} t}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{100}\right)$$